

MALYNÁR

ČÍSLO 6 — ROČNÍK 34

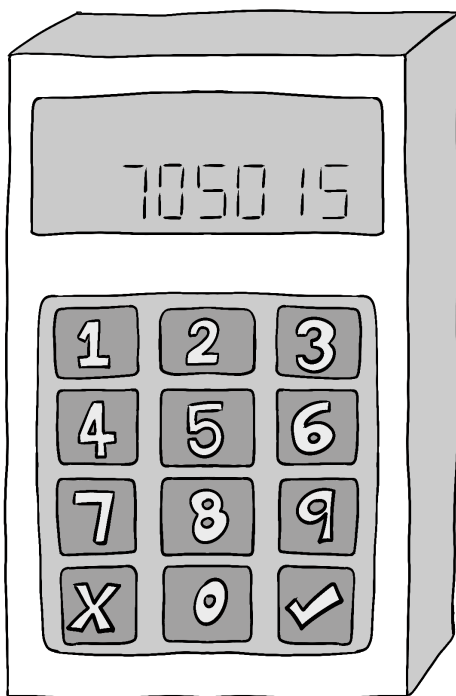
malynar.strom.sk



Ahoj!

Je tu ďalší časopis MAĽVNÁŽa, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najšikovnejších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia, kde budú obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s tebou uvidíme!

vedúci MAĽVNÁŽa



Vzorové riešenia 2. série úloh letného semestra

1

opravovali: Erik Novák a Katka Farbulová
najkrajšie riešenie: Filip Földes

45 riešení

Zadanie

Na odomknutie dverí nájdite a zadajte najväčšie číslo, pre ktoré platí, že:

- Každá cifra sa v ňom nachádza najviac 2-krát,
- súčin každých dvoch cifier je nepárny,
- súčet všetkých cifier je nepárny,
- dve rovnaké cifry sa nenachádzajú vedľa seba.

Riešenie

Druhý bod hovorí, že súčin každých dvoch cifier je nepárny. Ak vynásobíme ľubovoľné číslo párnym číslom, vždy dostaneme párný výsledok (napríklad $2 \cdot 3 = 6$ a $4 \cdot 5 = 10$). Aby súčin dvoch čísel bol nepárny, musia byť obe tieto čísla nepárne. Takže, aby súčin každých dvoch cifier bol nepárny, v celom čísle máme povolené použiť iba nepárne cifry.

Tretí bod hovorí, že súčet všetkých cifier čísla je nepárny. Keďže už vieme, že použijeme iba nepárne cifry, musí aj počet cifier byť nepárny. To preto, lebo súčet párneho počtu nepárnych cifier bude vždy párný a súčet nepárneho počtu nepárnych cifier bude vždy nepárny (napríklad $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 3 + 5 = 12$ ale $1 + 1 + 3 = 5$).

Z prvého bodu vieme, že každá cifra môže byť použitá najviac 2-krát, takže máme k dispozícii cifry 9, 9, 7, 7, 5, 5, 3, 3, 1 a 1. To je ale 10 cifier a my musíme použiť nepárny počet cifier, teda jednu nemôžeme použiť.

Aby sme dostali čo najväčšie číslo, musíme použiť čo najväčšie cifry na najvyšších (najľavejších) pozíciách (napríklad $953 > 593$). Taktiež vieme, že dve rovnaké cifry nemôžu byť vedľa seba, takže budeme číslo skladať striedaním najväčšej dostupnej cifry s druhou najväčšou. Začneme 9 (9), ďalšia najväčšia cifra je opäť 9, ale dve rovnaké nemôžu byť pri sebe, takže použijeme 7 (97). Ďalšia najväčšia je 9, tak ju použijeme (979), ďalej máme 7 (9797). Teraz už nemáme k dispozícii 9 ani 7, lebo sme obe použili dvakrát, teda najväčšia je 5 (97975). Ďalšia najväčšia cifra je opäť 5, ale to by boli dve rovnaké cifry vedľa seba, takže použijeme ďalšiu najväčšiu, a to 3 (979753). Teraz je najväčšia cifra 5, tak ju použijeme (9797535). Ostávajú nám už iba cifry 1, 1, 3, takže použijeme 3. V tomto momente máme číslo s ôsmimi ciframi (97975353). Chceme však číslo s nepárnym počtom cifier, takže na koniec ešte pridáme jednu 1. Teda najväčšie číslo vyhovujúce podmienkam je 979753531.

2

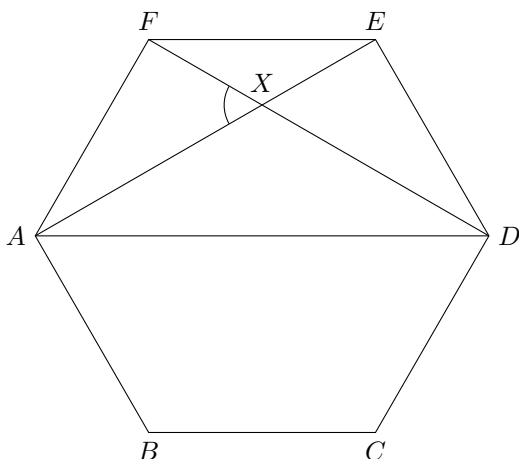
 opravovali: **Richard Vodička** a **Ondrej Králik**

najkrajšie riešenie: Ema Kurucová

45 riešení

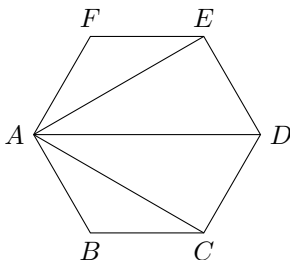
Zadanie

Miestnosť mala tvar pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ a v nej sa nachádzal koberec tvaru štvoruholníka $ADEF$. Určte veľkosť uhla AXF , ak je bod X priesečník uhlopriečok v štvoruholníkovom koberci $ADEF$.



Riešenie

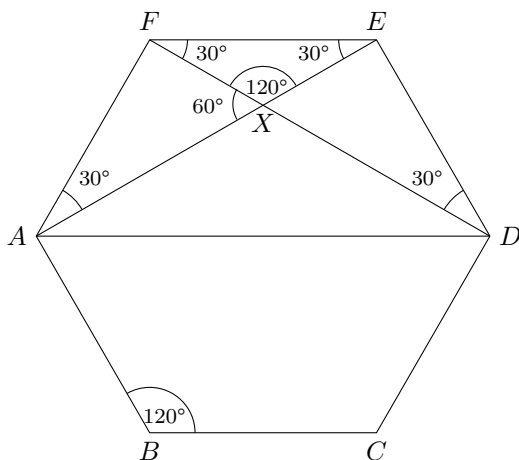
Začnime tým, že si dokážeme, že súčet vnútorných uhlov v šesťuholníku je 720° . Šesťuholník si vieme rozdeliť na 4 trojuholníky ako na obrázku.



Súčet vnútorných uhlov v každom z nich je 180° , teda celkovo má šesťuholník $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

Keďže v zadaní je uvedené, že šesťuholník je pravidelný, teda každý vnútorný uhol má rovnakú veľkosť, a to je $720^\circ : 6 = 120^\circ$.

Pozrime sa teraz na trojuholník AFE . Úsečky AF a FE sú strany pravidelného šesťuholníka, ktoré majú rovnakú dĺžku, čiže tento trojuholník je rovnoramenný. To znamená, že aj uhly FAE a FEA sú rovnako veľké. Pri vrchole F je uhol veľký 120° a teda na uhly FAE a FEA pripadá veľkosť $(180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$. Podobne to platí aj pre trojuholník FED . Vieme, že uhly DFE a AEF majú veľkosť 30° a rovnako aj uhly XFE a XEF z dôvodu, že X leží na oboch úsečkách DF a AE . V trojuholníku FEX už nepoznáme len jeden uhol FXE , ktorý má veľkosť $180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$. Hľadaný uhol AXF je susedný k FXE , teda má veľkosť $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.



Zadanie

Tabuľka je rozdelená na rôzne veľké políčka, ktorých strany majú celočíselné dĺžky. Čísla uvedené v políčkách predstavujú ich obsah. Určte obsah prázdnych políček. Veľkosti políček v obrázku sú len orientačné.

39		
		16
	12	8
21	30	

Riešenie

Obsahy jednotlivých obdĺžnikov si ako na obrázku označme A , B a C .

		C
B		
A		

Obsah obdĺžnika počítame ako súčin jeho šírky a výšky. Ak poznáme obsah obdĺžnika, tak jeho výšku vypočítame tak, že obsah vydelíme šírkou. Obdĺžniky s obsahmi 21 a 30 majú spoločnú výšku. Jej hodnota teda musí byť nejaký spoločný deliteľ obsahov týchto dvoch obdĺžnikov. Delitele 21 sú 1, 3, 7 a 21. Delitele 30 sú 1, 2, 3, 5, 6, 15 a 30. Hodnota výšky teda môže byť buď 1 alebo 3.

Ak to je 1, tak šírka obdĺžnika s obsahom 30 je $30 : 1 = 30$. Potom ale neexistuje vyhovujúca výška pre obdĺžniky s obsahmi 8 a 12. Ak by totiž mali tieto obdĺžniky najmenšiu možnú výšku, čiže 1, tak ich obsah by dokopy bol $30 \cdot 1 = 30$. Ak by mali

výšku väčšiu než 1, tak by ich spoločný obsah bol ešte väčší než 30. Ale ich obsah je dokopy $12 + 8 = 20$, čo je menej než 30, takže výška obdĺžnikov s obsahom 21 a 30 nemôže byť 1.

Výška spodného riadku musí byť 3. Potom obdĺžnik s obsahom 21 má šírku $21 : 3 = 7$. Rovnakú šírku má aj obdĺžnik s obsahom A . Obdĺžnik s obsahom 30 má šírku $30 : 3 = 10$. Rovnakú šírku má aj obdĺžnik zložený z dvoch obdĺžnikov s obsahmi 12 a 8, takže jeho výška je $(12 + 8) : 10 = 2$. To je zároveň výška celého riadku, čiže aj výška obdĺžnika s obsahom A . Takže $A = 7 \cdot 2 = 14$.

Obdĺžnik s obsahom 12 má potom šírku $12 : 2 = 6$. Teda obdĺžnik s obsahom B má šírku $7 + 6 = 13$. Obdĺžnik s obsahom 8 má šírku $8 : 2 = 4$. Rovnakú šírku má aj obdĺžnik s obsahom 16, a teda jeho výška je $16 : 4 = 4$. To je zároveň výška celého riadku, čiže aj výška obdĺžnika s obsahom B . Takže $B = 13 \cdot 4 = 52$.

Obdĺžnik s obsahom C má rovnakú šírku ako ten s obsahom 16, čiže 4. Obdĺžnik s obsahom 39 má rovnakú šírku ako ten s obsahom B , a teda jeho výška je $39 : 13 = 3$, čo je zároveň výška celého riadku, čiže aj výška obdĺžnika s obsahom C . Takže $C = 4 \cdot 3 = 12$.

Hľadané obsahy sú teda 14, 52 a 12.

		3
	4	4
13		
7 ²		
3		

Iné riešenie

Použijeme obrázky z predchádzajúceho riešenia. Obsahy jednotlivých obdĺžnikov si teda označíme ako A , B a C .

Pomer obsahov obdĺžnikov $X : Y$ znamená, že prvý obdĺžnik sa dá rozložiť na X a druhý na Y oblastí, ktoré majú všetky rovnaký obsah. Zároveň tento pomer platí aj po vynásobení oboch strán ľubovoľným číslom, napr. $3X : 3Y$ je rovnaký pomer ako pôvodný $X : Y$. To znamená, že ho vieme zmeniť aj na pomer 1 : $(Y : X)$ (obe strany sme vydělili číslom X), čo si môžeme všimnúť, že nám vyjadruje, koľkokrát musíme obsah prvého obdĺžnika dať do druhého, aj keď nemusí ísť o celé číslo.

Keďže je pomer obsahov obdĺžnikov v spodnom riadku $21 : 30$ a zároveň majú rovnakú výšku, tak v rovnakom pomere musia byť aj ich šírky. (Obsah obdĺžnika je rovný súčinu jeho šírky a výšky.)

Všimnime si potom obdĺžniky v nasledujúcom riadku – jeden s obsahom A (ktorý má rovnakú šírku ako ten s obsahom 21) a zvyšný, spojený z dvoch s obsahmi 12 a 8 (ktorý má rovnakú šírku ako ten s obsahom 30). Tie majú rovnakú výšku, a teda pomer ich obsahov musí byť tiež $21 : 30$. Teda:

$$A : (12 + 8) = 21 : 30$$

A z toho po vynásobení oboch strán rovnice $(12 + 8)$ dostávame:

$$A = 21 : 30 \cdot (12 + 8) = 14$$

V tomto kroku sme využili ekvivalentnú úpravu rovnice, teda úpravu rovnakú pre obe strany rovnice. Takéto úpravy nám umožňujú upraviť rovnicu tak, aby sa nám s ňou lepšie pracovalo, a zároveň sme nejako nezmenili jej výsledok. Tým, že sme vynásobili obe strany rovnice rovnakým číslom, sa nám obe strany rovnako zväčšili, a teda sa stále rovnajú.

Rovnakým spôsobom si všimnime potom aj obdĺžniky v nasledujúcom riadku – jeden s obsahom B (ktorý má rovnakú šírku ako obdĺžnik spojený z dvoch s obsahmi 14 a 12, a teda s obsahom $(14 + 12)$) a zvyšný s obsahom 16 (ktorý má rovnakú šírku ako ten s obsahom 8). Tie majú rovnakú výšku, a teda pomer ich obsahov musí byť tiež $(14 + 12) : 8$. Teda:

$$B : 16 = (14 + 12) : 8$$

A z toho po vynásobení oboch strán rovnice 16, teda využitím ďalšej ekvivalentnej úpravy rovnice dostávame:

$$B = (14 + 12) : 8 \cdot 16 = 52$$

Podobne si všimnime aj obdĺžniky v nasledujúcom, prvom riadku – jeden s obsahom 39 (ktorý má rovnakú šírku ako obdĺžnik s obsahom B) a zvyšný s obsahom C (ktorý má rovnakú šírku ako ten s obsahom 16). Tie majú rovnakú výšku, a teda pomer ich obsahov musí byť tiež $B : 16$. Potom:

$$39 : C = B : 16$$

Z toho po vynásobení oboch strán rovnice C (síce zatiaľ nevieme akú konkrétnu hodnotu C má, ak s ním vynásobíme obe strany rovnice, urobíme ekvivalentnú úpravu rovnice, tak ich zväčšíme o rovnako veľa, a teda sa budú rovnať aj po tejto úprave) dostávame:

$$39 = C \cdot (B : 16)$$

Potom po vynásobení oboch strán rovnice 16 platí:

$$39 : 16 = C \cdot B$$

A teda po vydelení oboch strán B (tu platí to isté čo pri vynásobení oboch strán rovnice C , síce ešte nevieme konkrétnu hodnotu B , vydelením ňou oboch strán ich zmenšíme rovnako veľakrát, takže sa stále budú rovnať) dostávame:

$$C = 16 : B \cdot 39 = 16 : 52 \cdot 39 = 12$$

Hľadané obsahy sú teda 14, 52 a 12. Riešenie je v súlade so zadáním, keďže strany môžu nadobúdať celočíselné hodnoty.

Komentár

Síce sa väčšina z vás dopracovala k správne mu výsledku, často sme museli strhávať body za neoverenie všetkých možností – väčšinou za možnosť, že aj 1 je deliteľom čísel. Preto je lepšie úlohy riešiť inak ako len overovaním všetkých možností a nestrácať body za nepozornosť.

Ak to už ale inak nepôjde, treba si poriadne skontrolovať, či ste naozaj našli všetky možnosti, a následne ich aj v riešení overiť, či sú pre zadanie platné alebo nie.

Tiež netreba zabúdať, že obrázok v zadaní je iba ilustračný, a teda z neho nevieme vyčítať, ktorá strana obdĺžnika je kratšia, a ktorá dlhšia.

4

opravovali: **Števo Vašak** a **Megy Škriabová**.
najkrajšie riešenia: Jozef Rusnák a Pavol Murín

45 riešení

Zadanie

7 ingrediencií – Aprénium, Budnocium, Cemspacium, Denebudium, Energium, Fujdenium a Goodnightium – idú do kotla v nejakom poradí. Platí, že:

- Budnocium aj Cemspacium idú po Denebudiu
- počet ingrediencií medzi Goodnightiom a Cemspaciom je o jedno menší ako dvojnásobok počtu medzi Fujdeniom a Budnociom
- počet ingrediencií vhozených pred Apréniom by sa vedel medzi sebou zoradiť šiestimi rôznymi spôsobmi
- počet ingrediencií, ktorý ide do kotla pred Energiom, je polovičný v porovnaní s počtom tých, ktoré idú po ňom

Zistite, v akom poradí treba ingrediencie dať do kotla a ukážte, že žiadne iné správne poradie neexistuje.

Riešenie

Pre jednoduchosť označme jednotlivé ingrediencie A, B, C, D, E, F a G .

Podľa tretej podmienky vieme povedať, že A pôjde do kotla určite štvrté. V takom prípade budú pred ním 3 ingrediencie, a tie sa dajú zoradiť práve šiestimi rôznymi spôsobmi ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$), čo z podmienky potrebujeme. Ak by bolo ingrediencií pred A viac, dali by sa zoradiť viac spôsobmi, ak menej, tak menej spôsobmi.

Podľa štvrtej podmienky vieme určiť, že E je určite tretie. Okrem E je ešte 6 ingrediencií, ktoré sa musia rozdeliť na dve časti tak, aby splnili podmienku. Podmienka bude platiť jedine vtedy, keď pred E budú 2 ingrediencie a za ním 4, lebo $2 = 4 : 2$.

Teraz sa pozrime na možné počty ingrediencií medzi F a B a postupne z nich vyrátajme možné počty ingrediencií medzi G a C pomocou druhej podmienky.

Ak by medzi F a B bolo 0 ingrediencií, medzi G a C by ich bolo $2 \cdot 0 - 1 = -1$, čo však nie je možné.

Ak by medzi F a B bola 1 ingrediencia, medzi G a C bude $2 \cdot 1 - 1 = 1$ ingrediencia. Potrebujeme teda v poradí nájsť dve voľné miesta, ktoré majú medzi sebou 1 voľné miesto. To platí len pre 5. a 7. miesto, teda iba jednu z dvojíc F, B a G, C by sme vedeli umiestniť podľa podmienok.

Ak by medzi F a B boli 2 ingrediencie, medzi G a C budú $2 \cdot 2 - 1 = 3$ ingrediencie. G a C by v nejakom poradí obsadili buď 1. a 5. miesto alebo 2. a 6. miesto. Ak obsadia 1. a 5. miesto, ostanú voľné miesta 2., 6. a 7., z toho ani jedna dvojica nespĺňa podmienku pre počet ingrediencií medzi F a B , teda to, že sú medzi nimi ďalšie dve miesta. Ak obsadia 2. a 6. miesto, ostanú voľné 1., 5. a 7. miesto. Ani tu žiadna dvojica voľných miest nespĺňa podmienku pre počet ingrediencií medzi F a B .

Ak by medzi F a B boli 3 ingrediencie, medzi G a C bude $2 \cdot 3 - 1 = 5$ ingrediencií. G a C teda musia obsadiť 1. a 7. miesto (len medzi nimi je práve 5 ingrediencií). Aby medzi F a B boli 3 ingrediencie, musia obsadiť v nejakom poradí 2. a 6. miesto. Ostáva nám len 5. miesto, na ktoré umiestnime D .

Podľa prvej podmienky vieme povedať, že C nemôže byť prvé, pretože pred neho už neumiestnime D . Preto G je prvé a C je siedme. Keďže B môže ísť až po D , nemôže byť druhé, lebo by nespĺnilo túto podmienku. Preto F je druhé a B je šieste. Výsledné poradie ingrediencií bude nasledovné: G, F, E, A, D, B, C .

Medzi F a B nemôže byť viac ingrediencií, pretože potom by podľa druhej podmienky vychádzal počet ingrediencií medzi G a C väčší ako 5. Maximálny počet ingrediencií medzi nejakými dvoma je však 5 (konkrétne medzi prvým a posledným miestom, teda medzi 1. a 7. miestom). Počas riešenia úlohy sme systematicky vylúčili všetky ostatné možnosti. Nájdene riešenie je preto jediné správne.

5

opravovali: Matúš „Libi“ Libák a Oliver Seman
najkrajšie riešenie: Filip Földes

40 riešení

Zadanie

Tímy Ahojnia, Budespacko, Caronocko a Dobruria hrali každý s každým práve raz v futbalovom turnaji. V tabuľke nižšie vidíme súhrnné informácie o výsledkoch zápasov. Práve jedno číslo v stĺpci strelené góly je však chybné. Zistite, aké bolo skóre jednotlivých zápasov a vysvetlite, prečo to inak nemohlo byť.

	Výhry	Remízy	Prehry	Strelené góly	Inkasované góly
Ahojnia	3	0	0	6	0
Budespacko	0	2	1	3	6
Caronocko	1	1	1	4	4
Dobruria	0	1	2	0	2

Riešenie

Pre jednoduchosť si tímy budeme označovať písmenami A, B, C, D.

Ako prvé si uvedomme, že každý strelený gól musel niekto inkasovať. To znamená, že počet strelených gólov a inkasovaných gólov musí byť rovnaký. Momentálne je počet strelených gólov v tabuľke $6 + 3 + 4 = 13$ a počet inkasovaných gólov $6 + 4 + 2 = 12$, čiže musíme jednému tímu zmenšiť počet strelených gólov o 1. Z toho vieme, že počet strelených gólov tímu D je určite správny, keďže ho už nevieme zmenšiť.

Tím A porazil všetky zvyšné tímy, teda prehra tímu B vznikla z tohto zápasu. Tím B potom musel remizovať so zvyšnými dvoma tímami C a D. Ako posledný zostáva zápas medzi C a D, ktorý skončil výhrou pre C, keďže tomu zostáva jedna výhra a tímu D jedna prehra.

Pozrime sa na to, ako mohli dopadnúť zápasy tímu D. Ten dvakrát prehral a raz remizoval, dokopy ale inkasoval len 2 góly. Pri každej prehre musel ale určite inkasovať aspoň jeden gól, preto obidve jeho prehry skončili 0:1. Keďže strelil 0 gólov, tak jeho remíza s B musela skončiť 0:0. Definitívne teda vieme výsledky zápasov D so zvyšnými tímami a môžeme ho odstrániť z tabuľky, pričom tímu B odčítame jednu remízu a tímom A a C jednu výhru a jeden strelený gól:

	Výhry	Remízy	Prehry	Strelené góly	Inkasované góly
Ahojnia	2	0	0	5	0
Budespacko	0	1	1	3	6
Caronocko	0	1	1	3	4

Vieme, že tímy B a C remizovali. Taktiež, keďže tím A má 0 inkasovaných gólov, tak ani jeden z týchto tímov nestrelil gól tímu A. To znamená, že všetky zvyšné strelené góly tímy B a C strelili vo vzájomnom zápase. Ak by nesprávna hodnota strelených gólov bola pri jednom z týchto dvoch tímov, tak by po úprave nemali rovnaký počet strelených gólov, a teda ich vzájomný zápas by nemohol skončiť remízou. Preto obidve čísla sú určite správne a ich zápas skončil 3:3.

Tím C už inkasoval 3 góly a musí inkasovať ešte 1. Preto zápas A:C musel skončiť 1:0. Tímu B ešte chýbajú 3 inkasované góly a preto zápas A:B skončil 3:0. Tým dostávame, že tím A strelil ešte 4 góly, ale podľa tabuľky ich mal streliť ešte 5. Preto to je tím A, ktorého počet strelených gólov bol nesprávny, správny počet je 5 namiesto 6 (v pôvodnej tabuľke je ešte aj tím D). Zároveň sme naším postupom ukázali, že to je jediné možné riešenie. Výsledky jednotlivých zápasov vidíme v tabuľke a môžeme si všimnúť, že naozaj sedia všetky hodnoty okrem počtu strelených gólov tímu A:

	Ahojnia	Budespako	Caronocko	Dobruuria
Ahojnia	-	3:0	1:0	1:0
Budespako	0:3	-	3:3	0:0
Caronocko	0:1	3:3	-	1:0
Dobruuria	0:1	0:0	0:1	-

Komentár

S úlohou ste sa popasovali veľmi dobre. Väčšina z vás správne prišla na výsledky jednotlivých zápasov a aj na to, ktorá hodnota je nesprávna. Dôležitý krok, pri ktorom niektorí z vás stratili body, bolo ukázať, prečo remíza medzi B a C musela byť práve 3:3. Nemôžeme tento výsledok predpokladať len preto, že B musí streliť ešte tri góly – niektorá hodnota je predsa chybná, tak to môže byť práve táto.

6

opravovali: **Paťo Paľovčík** a **Taly Poliačiková**

najkrajšie riešenie: Viktoriia Boyko

33 riešení

Zadanie

Na stole sú poháre s množstvom elixíru 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Štyri si v každom kroku vyberie ľubovoľné dva poháre na stole, vyleje ich a namiesto toho do nového pohára naleje množstvo elixíru rovné rozdielu predchádzajúcich množstiev. Tento proces opakuje, až dokým na stole nezostane už len jeden pohár.

- Určte, či môže byť na stole len prázdny pohár (množstvo elixíru je 0). Ak áno, ukážte ako. Ak nie, vysvetlite prečo.
- Určte, aké najväčšie množstvo elixíru môže ostať v poslednom pohári, uveďte aj postup prelievania a prečo nemôže byť väčšie.

Riešenie

Na začiatok si môžeme uvedomiť, že súčet objemov elixíru v jednotlivých pohároch je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, teda nepárne číslo. V každom kroku máme tri možné dvojice pohárov, ktoré môžeme vyliat, podľa toho, či majú párne alebo nepárne množstvo elixíru: párne s párnym, nepárne s nepárnym a párne s nepárnym.

Podme si rozobrať každú z možných situácií uvedených vyššie. Ak by sme vylievali dva poháre s párnym množstvom, najprv by sme vyliali ich súčet, ktorý je párnym a potom priliali ich rozdiel, ktorý je tiež párnym. Pôvodné celkové množstvo elixíru nám preto ubudne o párne číslo.

Podobne to bude platiť, ak by sme vylievali dva poháre s nepárnym množstvom, pretože rovnako ako pri dvoch párných číslach, súčet aj rozdiel dvoch nepárnych čísel je párnym. Teda najskôr odlejeme súčet dvoch nepárnych množstiev a následne prilejeme ich rozdiel. To znamená, že celkové množstvo aj v tomto prípade klesne o párne číslo.

Napokon, ak by sme v jednom kroku prelievali jeden pohár s párnym množstvom elixíru a jeden s nepárnym, vyliali by sme a následne aj priliali nepárne množstvo, keďže súčet aj rozdiel párneho a nepárneho čísla je nepárny. Celkové množstvo elixíru sa teda aj v tomto prípade musí zmenšiť o párne číslo.

- Z odsekov vyššie vyplýva, že celkové množstvo elixíru musí klesnúť o párne číslo. To znamená, že musí byť buď vždy párne, alebo vždy nepárne - podľa toho, aké bolo na začiatku. Keďže my začíname s celkovým množstvom elixíru 21, čo je nepárne číslo, musí aj v poslednom pohári zostať nepárne množstvo elixíru. Nula je však párne číslo, teda posledný pohár určite nemôže zostať prázdny.

- b) Pomocou tejto myšlienky môžeme riešiť aj podúlohu b). Keby sme sa nezamýšľali nad paritou posledného pohára (či musí obsahovať párne alebo nepárne množstvo elixíru), najväčšie množstvo v poslednom pohári by mohlo byť 6 (keby posledné dva poháre mali množstvo 6 a 0). Keďže pracujeme s rozdielmi nezáporných celých čísel (konkrétne od 0 po 6), nemôžeme ani v priebehu prelievania získať väčšie číslo ako 6, pretože je to naše najväčšie dostupné číslo. V poslednom pohári však napriek tomu nemôže vzniknúť množstvo 6, pretože sme zistili, že posledný pohár musí obsahovať nepárne množstvo elixíru.

Najväčšie nepárne množstvo elixíru, ktoré je menšie ako 6, je 5. Teraz už len treba dokázať, že sa môže vyskytnúť aj v poslednom pohári. Možností, ako to urobiť, je viacero, nám pre dôkaz stačí ukázať len jednu, pre ktorú to platí. Môžeme to urobiť napríklad takto:

$$\begin{aligned} \underline{1}, \underline{2}, 3, 4, 5, 6 &\rightarrow \underline{1}, 3, 4, 5, 6 \\ \underline{1}, \underline{3}, 4, 5, 6 &\rightarrow \underline{2}, 4, 5, 6 \\ 2, \underline{4}, \underline{5}, 6 &\rightarrow \underline{1}, 2, 6 \\ \underline{1}, \underline{2}, 6 &\rightarrow \underline{1}, 6 \\ 1, 6 &\rightarrow 5 \end{aligned}$$

Riešením tejto úlohy teda je, že na stole určite nemôže zostať iba prázdny pohár a najväčšie možné množstvo elixíru v poslednom pohári je 5.

Iné riešenie

Tí, ktorí ste už znali v jednoduchšom pracovaní s neznámymi, ste úlohu mohli riešiť aj trochu inak. Nazvime si súčet všetkých množstiev elixíru pred niektorým z krokov S . Množstvá pohárov, ktoré si následne vyberieme na prelievanie, si nazvime A a B , pričom predpokladajme, že $A \geq B$. Pri každom prelievaní najskôr odoberieme množstvá z pôvodných pohárov a potom prirátame ich rozdiel. Teda dostávame $S - (A + B) + (A - B) = S - A - B + A - B = S - 2B$. Z toho vyplýva, že bez ohľadu na to, aké množstvo elixíru bolo v dvoch vybraných pohároch, po každom prelievaní sa aktuálny celkový súčet množstva elixíru musí zmenšiť o $2B$, teda o párne číslo. Zvyšok riešenia je už podobný ako vo vzorovom riešení vyššie.

Komentár

Väčšina z vás sa dostala ku správne výsledku v oboch podúlohách, z čoho sa veľmi tešíme. Viacero z vašich riešení však bolo jedným konkrétnym spôsobom riešenia, napríklad, že začíname prelievať od najväčšieho pohára alebo, že sa snažíme vytvárať len poháre s množstvom 1. V úlohách takého typu je však dôležité ukázať všeobecne, prečo vaše myšlienky musia platiť pri každom spôsobe prelievania.

Konečné poradie letného semestra 34. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 2.	Viktoriia Boyko	Z6	GAlejKE	54	9	9	9	9	9	9	108
	Oleg Boyko	Z3	ZKe28KE	54	9	9	9	9	9	9	108
3.	Ivana Kiselá	Z6	GAlejKE	53	9	9	9	8	9	9	106
4. - 6.	Filip Saxa	Z6	MalGPha	52	9	7	9	9	9	9	104
	Filip Foldes	Z5	GESChar	53	9	8	9	7	9	8	104
	Lucia Erdélyiová	Z6	GAMČABA	53	9	8	9	7	9	9	104
7. - 8.	Jakub Haško	Z5	ZTrebKE	49	9	9	9	9	9	5	103
	Jana Mikušová	Z4	SZFTeBA	53	8	8	9	7	9	-	103
9. - 10.	Andrej Mišuth	Z5	ZMAleBA	54	9	9	5	8	9	5	102
	Jozef Rusnák	Z4	ZKro4KE	51	9	7	4	9	9	8	102
11.	Dorota Feňovčíková	Z6	ZBeleKE	54	9	9	9	9	9	-	99
12.	Peter Pavol Ihnát	Z5	ZKPOstr	51	9	8	6	8	6	7	96
13.	Katarína Osuská	Z3	ZDrJDMA	45	7	9	9	8	-	8	95
14.	Artem Pivnenko	Z6	GAlejKE	51	9	9	9	4	8	4	94
15. - 18.	Ema Kurucová	Z6	GKonšPO	45	6	9	9	6	9	8	92
	Richard Kovac	Z5	ZHronKE	45	8	8	5	8	7	8	92
	Bruno Kovács	Z6	GJARMPO	47	9	8	6	8	6	8	92
	Lívia Kropuchová	Z6	GAlejKE	44	9	9	9	9	9	3	92
19.	Stanislav Cabúk	Z5	ZŠvedlár	42	6	8	9	8	9	4	90
20.	Karin Beneš	Z4	ZJMasPha	36	9	9	8	9	9	-	89
21.	Matej Orosz	Z6	GAlejKE	45	9	8	4	7	6	4	83
22. - 23.	Patrik Novotný	Z6	ZJuhVnT	45	7	2	5	9	7	4	79
	Matúš Malý	Z4	ZNSUTTT	48	6	8	5	6	-	-	79
24.	Peter Adamczak	Z4	ZDumbBB	37	6	8	7	6	6	3	77
25.	Viktória Jesenská	Z6	ZKe30KE	43	7	8	3	6	6	3	76
26.	Paulína Pokorná	Z6	ŠpMNDaG	29	9	9	9	8	9	-	73
27.	Mykhailo Zemliakov	Z6	GAlejKE	37	8	9	6	5	6	-	71
28.	Ondrej Pero	Z6	ZBudimír	33	7	9	6	6	6	2	69
29. - 30.	Maroš Libák	Z2	ZStanKE	33	5	9	5	8	-	-	68
	Pavol Murín	Z6	ZKro4KE	36	8	8	5	9	-	2	68
31.	Timotej František	Z6	ZKe30KE	35	0	7	9	8	6	2	67
32.	Lukáš Biba	Z4	ZDumbBB	24	7	8	9	6	1	-	63
33. - 34.	Gabriel Jesenský	Z4	ZKe30KE	29	7	6	3	6	3	3	60
	Samuel Nataniel Kačmár	Z5	ZSofŘičany	22	7	6	6	7	6	4	60
35.	Platon Omelchenko	S1	GAlejKE	18	8	9	6	5	6	3	55
36.	Felix Kompiš	Z6	ZBe16KE	28	-	9	5	4	4	3	53
37.	Šimon Palko	Z6	GJAR	27	6	1	5	6	3	4	52
38.	Richard Palenčar	Z6	GKonšPO	26	9	4	6	2	2	1	50
39.	Adam Tóth	Z6	ZKe30KE	21	6	6	2	7	7	-	49
40.	Emanuel Dráb	Z5	SZFPeKE	46	-	-	-	-	-	-	46
41.	Barbora Chudá	Z6	GAlejKE	8	8	8	5	9	-	-	38
42.	Zuzana Tóthová	Z6	ZKe30KE	17	2	6	2	2	1	-	30
43.	Lukáš Minarčík	Z4	ZKro4KE	6	7	5	5	-	-	-	28
44.	Hanna Pivnenko	Z3	ZKe28KE	27	-	-	-	-	-	-	27
45.	Lenka Sovová	Z5		0	4	6	4	2	3	5	26

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
46.	Jakub Harčarik	Z6	ZKe30KE	21	-	-	-	-	-	-	21
47.	Daniela Kováčová	Z5	ŠpMNDaG	0	7	6	4	0	0	1	19
48. - 49.	Michal Sklenár	Z4	ZLevoSL	9	-	-	8	-	-	-	17
	Samuel Bittner	Z6	ŠpMNDaG	0	7	-	-	5	4	1	17
50.	Daniel Feher	Z5	ZPAngKE	0	3	8	0	2	-	-	13
51.	Alexandra Šišková	Z5	ZKro4KE	0	-	-	6	-	3	-	9
52.	Miroslav Balint	Z5	ZKomeMI	8	-	-	-	-	-	-	8
53.	Jakub Madžo	Z6	ZKro4KE	4	-	-	-	-	-	-	4
54.	Eubomír Ondrůšek	Z6	ZKro4KE	1	-	-	-	-	-	-	1



Názov:	MALYNÁR – korešpondenčný matematický seminár Číslo 6 • Máj 2025 • Letný semester 34. ročníka
Web:	malynar.strom.sk
E-mail:	malynar@strom.sk
Riešenia:	Prijímame odovzdaním na webe, poštou a len v prípade poruchy na adrese riesenia@strom.sk
Organizátor:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.