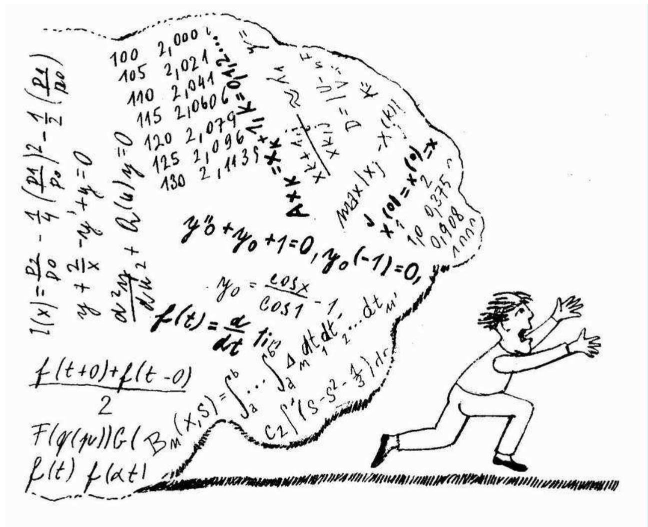
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Milí naši riešitelia !

Prázdniny sú už za nami a po čase oddychu nastal čas pustiť sa usilovne do štúdia vo svojej milovanej školičke. Niekomu sa vracia do školy ľahšie, iným tažšie.

Veríme, že aj v tomto školskom roku, ktorý je pre **STROM** jubilejný, sa vám úlohy budú páčiť. Prečo jubilejný? No je to už (presnejšie bude) 30 rokov, kedy na východnom Slovensku vznikol prvý korešpondenčný seminár KMS, ktorý po 30 rokoch stále funguje. Síce pod iným názvom, ale stále s rovnakým poslaním. Preto veríme, že sa s chuťou pustíte do rátania, a tým prispejete k oslave 30 rokov od vzniku prvého korešpondenčného seminára na Slovensku

Vaši **STROM**isti



30 rokov KMS na Slovensku

Veru, už je to 30 rokov, od kedy KMS začalo zapúšťať korene v našich srdiečkach. A u niektorých sú korene veľmi hlboké. Mnohí zakladatelia KMS sú dnes ľudia v pokročilom veku, ale myslím si, že ich srdiečko je u každého nejakým spôsobom spojené s matematikou v korešpondenčnom seminári. Preto veríme, že sa nám podarí vám priniesť ich postrehy k 30. výročiu nášho seminára.

KMM - Klub mladých matematikov

Aj počas zimnej série našich úloh tu bude pre vás Klub mladých matematikov. O jeho programe a náplni sa dozviete čoskoro na `http://umv.science.upjs.sk/kmm`. Veríme, že nepohrdnete takouto ponukou a radi ju využijete.

PALMA - Programovanie algoritmy matematika

Združenie STROM a Ústav informatiky Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach sa rozhodli zúžitkovať bohaté skúsenosti z organizovania korešpondenčných seminárov z matematiky a začať organizovať programátorskú súťaž pre stredoškolákov s názvom PALMA

Ak si chcete trochu zasúťažiť, otestovať svoje schopnosti analyzovať problémy, hľadať algoritmy na ich riešenie a vedieť rýchlo, efektívne a korektne naprogramovať stačí sa len zapojiť.

Pravidlá a tréningové úlohy nájdete na domovskej stránke súťaže: `http://palma.strom.sk.`

STROM — Súťaž Talentovaných Riešiteľov Obľubujúcich Matematiku je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Je určený žiakom stredných škôl, ktorí majú záľubu v matematike a radi riešia neštandardné a zaujímavé úlohy.

Prebieha korešpondenčnou formou, čo znamená, že riešitelia pošlú do stanoveného termínu (svoje vlastné) riešenia úloh organizátorom. V priebehu niekoľkých týždňov ich dostanú späť, ale už s opravenými chybami a s počtom bodov, ktoré za úlohy získali.

V časopise, ktorý súťaž sprevádza, je ku každej úlohe uvedený komentár a stručný návod na riešenie. Už sa stalo tradíciou, že neuverejňujeme priebežné poradie, pretože chceme, aby pre riešiteľov boli výzvou samotné úlohy a nie ostatní riešitelia. Po uzavretí semestra, teda **dvoch sérií**, zverejníme celkové poradie a tí najlepší sa zúčastnia týždňového matematického sústredenia v niektorom rekreačnom zariadení na Slovensku.

Pokyny pre riešiteľov

Riešiteľmi môžu byť žiaci prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci z nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov.

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Zasielajte ich **poštou (!!!), nie osobne** do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) organizátorom na adresu:

STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1.

S prvou sériou, ktorej riešenia nám posielate, pošlite vyplnenú **prihlášku**. Riešenie každej úlohy píšte na samostatný papier **formátu A4** na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail `strom@strom.sk`, prostredníctvom debaty na našej stránke alebo osobne.

Ak si s nejakou úlohou nebudete vedieť poradiť, no radi by ste i napriek tomu vedeli jej riešenie, pošlite nám riadne A4-ku s hlavičkou a namiesto riešenia nám na ňu napíšte, kde ste pri uvažovaní skončili (resp. sa vám ani nepodarilo odraziť sa. . .) a my vám na ten hárok papiera ochotne naznačíme riešenie. Nech si matematici naďalej pomáhajú!

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia, za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 5 bodov.
Prvákom sa do poradia započítava päť najlepšie vyriešených úloh + počet bodov za najlepšie vyriešenú úlohu.
Druhákom sa do poradia započítava šesť najlepšie vyriešených úloh.
Tretiakom sa do poradia započítava päť najlepšie vyriešených úloh spomedzi úloh 1 až 6 + počet bodov za lepšie vyriešenú úlohu z úloh 7 a 8.
Štvrtákom sa do poradia započítavajú štyri najlepšie vyriešené úlohy spomedzi úloh 1 až 6 + úlohy 7 a 8.

Prémia sa udeľuje podľa školy na konci semestra. Do úvahy sa berie súčet bodov všetkých žiakov danej školy v príslušnom semestri — ak je ten medzi 1 a 50, každý z nich dostane prémiu 5 bodov, medzi 51 a 100 sú to 4 body, atď., medzi 201 a 250 je to 1 bod, nad 250 je to 0 bodov.

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie, za poslanie riešení po termíne a za osobné doručenie riešení. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešení zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrená.

Hlasovanie úloh závisí od zaujímavosti a jedinečnosti vášho riešenia. Radosť vám môže spraviť 1 hlas (prehľadné, jasné riešenie), alebo 2 či 3 hlasy za výnimočné a originálne nápady. Ak nájdete riešenie v literatúre, kladné hlasy si nepripočítate. Naopak, hrôzu budiace riešenia (výzorom, zložitosťou) získajú -1 hlas. Horšie obídu tí, ktorým za odpisovanie strhneme body. Po ich vydelení počtom odpisujúcich dostanú -3 hlasy, po veľkom odpisovaní je to -5 hlasov. Tak hor sa do hľadania pekných riešení, zabudnime na odpisovanie a hrajme sa s matematikou! Riešitelia s najvyšším počtom hlasov budú na konci semestra odmenení.

Sústredenie je pre 32 účastníkov. Je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho podľa záverečného poradia prví desiati riešitelia, ďalších 10 najlepších riešiteľov, ktorých škola je v Košickom alebo Prešovskom kraji a členovia troch najlepších družstiev z Košického (Prešovského) matboja, ktorý sa koná v príslušnom polroku. Prípadní ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia STROMu; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Na sústredenie však nebudú vôbec pozvaní riešitelia, ktorí získali v príslušnom semestri -2 alebo menej hlasov.

Zadania úloh Zimného semestra 30. ročníka

1

Prvá séria
Úlohy pripravili: vedúci STROMu
Termín odoslania riešení: **17. október 2005**

1. Koľkými spôsobmi sa dajú v sčítanke

$$\begin{array}{rcccccc} & & & Z & R & A & K \\ + & & & C & U & C & H \\ + & & & H & M & A & T \\ + & & & C & H & U & T \\ + & & S & L & U & C & H \\ \hline & Z & M & Y & S & L & Y \end{array}$$

nahradiť písmenká číslicami tak, aby rovnaké písmenká boli nahradené rovnakými číslicami, všetky samohlásky boli nuly, rôzne spoluhlásky boli rôzne nenulové číslice a sčítanie platilo? (CH sú dve písmenká, C a H; A, U, Y sú samohlásky, ostatné sú spoluhlásky.)

2. Majme mriežku $n \times m$ (minimálne 5×5), ofarbujme jej políčka bielou a čiernou farbou. Ukážte, že keď budeme akokoľvek ofarbovať, vždy dostaneme

a) pravouhlý trojuholník s vrcholmi rovnakej farby.

b) obdĺžnik, ktorého vrcholy sú rovnakej farby.

3. Majme postupnosť čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, ktorá má súčasne nasledujúce vlastnosti:

i) prvý člen má hodnotu $a_1 = \frac{1}{2}$,

ii) vzťah $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 a_n$ platí pre všetky prirodzené čísla $n \geq 1$.

Nájdite predpis, na základe ktorého je možné určiť hodnotu n-tého člena tejto postupnosti a_n bez toho, aby sme museli poznať hodnoty všetkých predchádzajúcich členov.

4. Turista sa rozhodol navštíviť na dovolenke 10 miest počas 15 dní a v každom z nich stráviť najviac 2 dni, ale nie nutne bezprostredne za sebou. (Každý deň chce navštíviť práve jedno miesto.) Koľkými spôsobmi má možnosť to urobiť?

5. Nájdite také celé čísla a, b, c, d, pre ktoré polynóm $ax^3 + bx^2 + cx + d$

a) sa rovná 1, keď x je rovné 19,

b) sa rovná 2, keď x je rovné 62,

c) spĺňa podmienky a) a b) súčasne.

6. Zostrojte trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C, ak sú dané dĺžky ťažníc t_a, t_b prislúchajúce vrcholom A, B. Vykonajte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom k daným dĺžkam t_a, t_b.

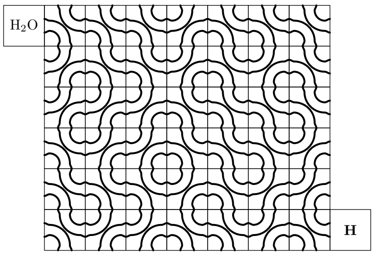
7. Definujme si postupnosti $a_n = \frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+4}}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a $b_n = a_1 a_2 \ldots a_n$. Ukážte, že $b_n = \sqrt{\frac{2(n^2+1)}{n^2+2n+2}}$ a pomocou toho, že $\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{b_n}{\sqrt{2}} - \frac{n}{n+1} < \frac{1}{n^3}$.

8. Vyriešte rovnicu $\cos(\cos(\cos(\cos x))) = \sin(\sin(\sin(\sin x)))$ v obore reálnych čísel.

2

Druhá séria
Úlohy pripravili: vedúci STROMu
Termín odoslania riešení: **21. november 2005**

1. V istom americkom meste sú všetky ulice sú seba buď kolmé alebo rovnobežné. Vytvárajú tak štvorcovú sieť. Dokonca aj vodovodné potrubia vytvárajú štvorcovú sieť, ale o čosi podivnejšiu. V každom štvorci je buď dvojica spájajúca štvorec susedný na severe s východným a štvorec na západe s južným, alebo je tam dvojica potrubí spájajúcich susedný štvorec na severe so západným a štvorec na východe s južným. Raz nastalo v meste zemetrasenie a niektoré potrubia sa jeho účinkom zmenili na potrubia toho opačného typu. Nastal chaos, ktorý si môžete pozrieť na obrázku. Poraďte radným v meste, na koľkých najmenej štvorcoch treba zmeniť potrubie na to druhé, aby sa voda z vodární (označených H_2O) dostala do nemocnice (označenej **H**). Ďalej zistite, koľkými spôsobmi je to možné vykonať.



2. Štvorcový list papiera rozstrihneme pozdĺž priamky na dve časti. Jednu zo vzniknutých častí opäť rozstrihneme na dve atď. Aký najmenší počet rezov treba urobiť, aby sme medzi získanými kúskami mali aj 2005 dvanásťuholníkov?

3. Nech A je taká množina celých kladných čísel, že pre každé dva jej rôzne prvky x, y platí nerovnosť $|x-y| \geq \frac{xy}{25}$. Dokážte, že množina A obsahuje najviac 9 prvkov. Rozhodnite, či takáto deväťprvková množina A existuje. $|x|$ znamená absolútnu hodnotu z čísla x (napríklad $|-6| = 6$ a $|4| = 4$).

4. Nech a, b, c, d, e sú prirodzené čísla také, že $1 \leq a < b < c < d < e$. Dokážte, že

$$\frac{1}{[a;b]} + \frac{1}{[b;c]} + \frac{1}{[c;d]} + \frac{1}{[d;e]} \leq \frac{15}{16},$$

kde $[m;n]$ je najmenší spoločný násobok m a n (napr. $[4;6] = 12$).

5. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Jeho výšky nech sú označené AD, BE, CF. Ďalej nech päty kolmíc z bodov A, B, C na priamky EF, FD, DE sú postupne P, Q, R. Ukážte, že priamky AP, BQ, CR sú súbežné (pretínajú sa v jednom bode).

6. 64 súťažiacich je očíslovaných 1,2,…,64 a usadených v tomto poradí každý pri jednom stole, pričom tieto stoly sú poukladané podľa čísel vzostupne proti smeru hodinových ručičiek na kružnici, v strede ktorej sú jedny veľké hodiny a neuveriteľne veľa lampičiek, ktoré sú všetky zhasnuté. Každú minútu sa všetci súťažiaci postavia a presadnú si. Súťažiaci číslo k si presadne o k stolov proti smeru hodinových ručičiek. Pri jednom stole môže sedieť aj viac hráčov naraz. Po každom presune spočítame počet hráčov, ktorí sedia pri tom istom stole ako hráč č.1 a zapneme práve taký počet lámp. Kde bude hráč č.1 keď sa zapne 2005-ta lampa?

7. Majme postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, a_3 \dots$ takú, že $a_1 = 1$ a $a_n = \frac{(4n-6)a_{n-1}}{n}$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq 2$. Dokážte, že všetky členy tejto postupnosti sú celé čísla.

8. Nájdite kladné celé čísla r, s, t, u, v, w také, že

i) $r > t > v$,

ii) $r^s = t^u = v^w$,

iii) $tu = vw$,

iv) $r + s = t + u$,

v) súčin tu je minimálny.

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- milk AGRO, sabi
- Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika, Košice
- Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice

Názov: STROM — korešpondenčný matematický seminár
Číslo 1 • September 2005 • Zimný semester 30. ročníka (2005/2006)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`