STROM

Korešpondenčný matematický seminár

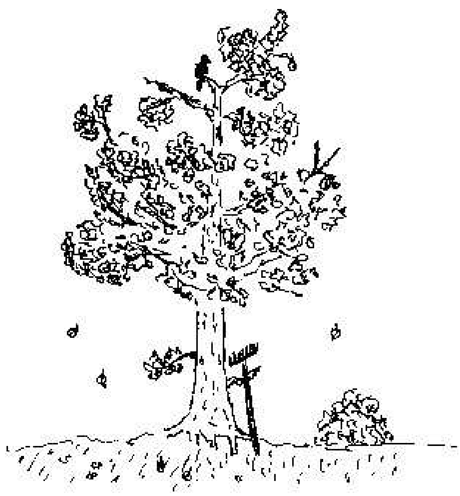
Ahojte **STROM**čence,

Pomaly ďalej zájdeš. Kto čaká, dočká sa... Tieto a kopa iných príslovní sa dá povedať na čakanie na poradie a výsledky STROMu. No dočkali ste sa, tak sa tešte! Výsledky sú už na svete, čo na ne povedať? Blahoželame víťazom, ale samozrejme aj tým, ktorým sa tentokrát nepodarilo umiestniť sa práve najlepšie. Nevadííííí... hlavne, že sme si dobre zarátali. Tešíme sa z každého konárika nášho **STROM**u.

Leto sa nám blíži tak rýchlo, že sa ani nespamätáme a bude aj za nami, tak si ho isto, ale isto vychutnajte naplno! A tešte sa aj na jeseň, kedy by sme sa (ak nám to počasie pod STROMom dovolí) mohli stretnúť na sústredení.

Zatiaľ sa nám majte krásne, niekedy niekde pri niečom s niekým...

Vaši **STROM**isti.



Plody našej práce???

Komentáre k úlohám 4. série 30. ročníka

1. Opravoval: Kuiso **Počet riešiteľov: 30**

Najoriginálnejší riešitelia: Jakub Vaňo, Michal Petrucha

Jediné, na čo si bolo treba dávať pozor, bolo nepúšťať sa do žiadných konkrétnych usadzovaní stromov. Nie že by to takto nešlo. No je ťažké a zbytočné ukazovať, že ak niečo nejde v našom prípade, nepôjde to nikdy. Lepšie je hneď ukázať, že to nejde :)

A to sa vám darilo. Väčšinou ste na to išli sporom. Zistili ste, že z 2006 stromov urobíme najviac 2004 neprekrývajúcich sa trojuholníkov. Z nich ak má každý aspoň 20m^2, tak ich celkový obsah je väčší ako obsah záhrady. Takto u väčšiny vyzerala hlavná myšlienka. Učesať ju do riešenia ste, poniektorí aj dosť krkolomne, zvládli, väčšinou bez straty bodu.

A ešte jedná vec k vašej cti. Mnohí ste si všimli, že úloha nebola celkom dobre zadaná. Ak by všetky stromy ležali vedľa seba, nebol by ani jeden trojuholník a niet čo riešiť. Všetci ste sa však pustili aj do skutočnej úlohy. A to nás veľmi teší. Ak náhodou aj v budúcnosti natrafíte na takúto chybu (verme, že nie), radšej sa nás rýchlo opýtajte, či je to naozaj len chyba (najlepšie mailom). Takže ešte raz jedna veľká pochvala.

2. Opravoval: Tomáš **Počet riešiteľov: 19**

Najoriginálnejší riešitelia: Miroslav Baláž

Celkom pohodová úloha, viacerí z vás s ňou nemali žiaden problém. Vyskytli sa však aj také riešenia, ktoré neboli celkom OK.

K vyriešeniu úlohy si stačilo všimnúť, že rozdiel dvoch strán nezávisí na tom, koľkokrát si vyrobíme nový trojuholník. Nech napríklad v pôvodnom trojuholníku máme strany a, b. Ich rozdiel je $a - b$. Vyrobme si nový trojuholník s polovičným obvodom. Ľahko sa ukáže, že rozdiel dvoch strán je znova $a - b$. A je jasné, že ak budeme postup opakovať, rozdiel dvoch strán bude stále $a - b$. Po dostatočne veľa opakovaniach nastane situácia, že $a - b$ je väčšie ako obvod práve vzniknutého trojuholníka (obvod sa v každom kroku zmenšuje dvakrát).

Ak si označíme strany x, y, z, bez akejkoľvek ujmy na zdraví $x = y + a - b$, a platí $a - b > x + y + z$. Po dosadení tak dostávame nerovnosť $0 > 2y + z$, ktorá nie je splnená v žiadnom trojuholníku (strany sú vždy kladné čísla). Tento trojuholník sa teda nedá zostrojiť. Jediný trojuholník, pre ktorý je možné postup opakovať donekonečna, je ten, pre ktorý $a = b$, a analogicky $a = c$, $b = c$. Ak by totiž $a - b$ bolo kladné, tak nastane situácia ako v dôkaze a po určitom počte krokov dostaneme dĺžky strán, z ktorých nie je možné poskladať trojuholník.

3. Opravoval: Robko Hajduk **Počet riešiteľov: 33**
Najoriginálnejší riešitelia: Alex Kuncová, Vladislav Ujházi, Gabriela Vozáriková
Ako som postrehol, asi každý z vás chcel pomôcť papagájovi. Našli sa i takí, ktorí to všetko zovšeobecnili úplne a dospeli k správnemu záveru, že papagáj povie na číslo A také číslo, aká je mocnina v prvočíselnom rozvoji čísla A.
Pár myšlienok pre tých, čo náhodou omylom neposlali, alebo spravili chybičku. Na základe dvojnásobného použitia poslednej podmienky a rozkladu čísla 2007 sme ľahko dospeli k tomu, že to, čo papagáj povie, je 0. Veď $2007 = 3 \cdot 3 \cdot 263$ (použijeme podmienku, že ak číslo konči 3, tak to, čo papagáj povie, je stále 0). No a pri 2006? Jej rozklad je $1003 \cdot 2$, no nevieme, čo povie na 2. Ale keďže vieme, že na 10 povie 1, na 2000 zase 3, tak sa pozrime na rozklad čísla 2000: $2000 = 2 \cdot 10^3 = 2^4 \cdot 5^3$. V rozklade 10 je 5 iba raz a v 2000 až trikrát. Zase 2 je v rozklade 10 raz a v 2000 až štyrikrát. No tak, čo nám povie papagáj na 2? Kto to nevedel, viac nepoviem, nech rozmýšla.

4. Opravoval: Riki Gál **Počet riešiteľov: 18**
Najoriginálnejší riešitelia: Viera Cimbáková, Tomáš Kocák, Viktor Popovič
Ahojte všetci. Ako ste si určite všimli, úloha pozostávala z vyriešenia dvoch nerovníc (pracovne ich nazvime ľavá a pravá nerovnosť). Začnime teda ľavou. Kto si uvedomil, tak ľahko prišiel na to, že $\frac{(m+n)!}{(m-n)!} = (m-n+1).(m-n+2)....(m-1).m.(m+1)....(m+n)$. A tu už stačilo dokázať, že $n! \leq (m-n+1).(m-n+2)\dots(m-1).m$ a $2^n \leq (m+1)....(m+n)$, čo sa už ukázalo veľmi ľahko. Pravá nerovnosť bola čo do myšlienky jednoduchšia, pretože na ňu nebolo treba aplikovať nič okrem známeho dôkazu matematickou indukciou podľa n. Body za riešenia išli dolu v prípade, že ste nedostatočne zdôvodnili svoje kroky a svoj postup, pretože príklady by mali byť napísané tak, aby si opravovateľ nemusel domýšľať, prečo ste urobili to alebo ono :) Samozrejmosťou bolo strhnutie bodov za vyriešenie len jednej z týchto dvoch nerovníc.

5. Opravoval: Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 15**
Najoriginálnejší riešitelia: Alex Kuncová, Kristína Kovalčíková, Ondrej Mikuláš
Úloha mala dve časti. Za vyrátanie veľkostí uhlov Kuisovho trojuholníka ste mohli získať lacné dva body. Táto časť sa podarila skoro všetkým riešiteľom, ktorí sa pustili do tejto úlohy. Našlo sa viacero rôznych postupov, od rátania uhlov cez využitie vlastností zhodných trojuholníkov až po rôzne exotické hókusy-pókusy. Každopádne výsledok 108°, 36° a 36° sa na konci väčšinou objavil.
Na vyriešenie druhej časti úlohy už bolo treba použiť zbrane väčšieho kalibru, ako napríklad „fyzikálnu myšlienku“. Táto myšlienka spočíva zhruba v nasledovnom: Vezmime si nejaký tupouhlý trojuholník a skúsme posúvať vrchol C tak, aby sa veľkosť uhla γ a polomer opísanej kružnice nezmenili. (Prečo sa tieto dve veličiny zachovávajú súčasne?) Ako sa bude meniť polomer kružnice vpísanej do trojuholníka ABC? (Nakreslite si dosť veľký obrázok!) Akú najväčšiu a akú najmenšiu hodnotu môže nadobudnúť polomer vpísanej kružnice? Kedy sa nadobúda tá najväčšia a kedy tá najmenšia? Ako tieto medzné hodnoty súvisia s polomerom opísanej kružnice? Pre ktoré hodnoty uhla γ sa teda môže vzdialenosť stredov týchto kružníc od strany c rovnať? Keď sa vám podarí zodpovedať na tieto všetky otázky, tak riešenie druhej časti úlohy máte vo vrecku.
Samozrejme, úloha sa dala vyriešiť aj bez (vraj pofidérnych?) fyzikálnych myšlienok o tom, ako sa niečo zmení, keď niečím pohneme, a to použitím niekoľkých vzorcov a vlastností goniometrických funkcií sínus a kosínus.

6. Opravoval: Robko Hajduk **Počet riešiteľov: 6**
Najoriginálnejší riešitelia: Vladislav Ujházi
Taká krásna úloha, a len šiesti z vás ju poslali. Ach jaj. Veď nebola vôbec ťažká. Skúsim načrtnúť myšlienku dôkazu. Stačí nám rozobrať 2 prípady. A to, ak a) $D(ab, c) = 1$ a b) $D(ab, c) \neq 1$. Pozrime sa náznakom na obe časti.
V časti a), ak vieme, že $D(ab, c) = 1$, tak $D(a, c) = D(b, c) = 1$. Na základe týchto poznatkov dostávame v našej rovnosti, že $D(a, bc) = D(b, ac) = D(a, b)$. Využime ešte jeden poznatok, a to $D(a^2, b^2) = D^2(a, b)$. Kto neverí, nech si to sám odvodí. A ak si to všetko dosadíme do našej rovnosti, dostaneme v pravej časti rovnosti

$$D^2(a, b) + D(a, b) + D(a, b) = 239^2 - 1$$

Toto je kvadratická rovnica, tak šup si ju len dopočítať a vybrať, čo môže byť riešením. Našepkám, že len jedno z riešení rovnice vyhovuje zadaniu.
Načrtnime si aj myšlienku, ako začať v časti b). Keďže $D(ab, c) \neq 1$, tak označme $D(ab, c) = d$. Vieme, že $d|ab$ a $d|c$, čo znamená, že aj $d|ab + c$. A z toho plynie, že $d|239^2$. Rozoberieme si všetky možnosti, a zistíme, že vyhovuje práve tá, kde $d = 239$ (odôvodnite si, prečo.) No a teraz už len pár ďalších úvah a úprav a … No, to si už isto dorátate sami. A nabudúce sa popasujte aj s úlohou, ktorá na prvý pohľad nevyzerá vábne.

7. Opravoval: Dávid Hudák **Počet riešiteľov: 15**
Najoriginálnejší riešitelia: Zuzana Harmincová, Martin Melicherčík
Do nášho **STROM**u sa dostala aj športová téma. Hľadali ste odpoveď na otázku o počte účastníkov turnaja v piškvorkách. Mnohým z vás sa to podarilo. No našli sa aj chyby, tie pochádzajú asi z nepozornosti a rýchleho počítania. Inak to bola pekná kombinatorická úloha, stačilo si označiť niekoľko neznámych a potom riešiť sústavu rovníc. Žiaden problém, však? Len neviem, prečo vás tento príklad neoslovil viacerých. Žeby kvôli vysokému číslu úlohy? Dobrá rada: Netreba sa báť! Tak ahojte!

8. Opravoval: Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 5**
Najoriginálnejší riešitelia: Vladislav Ujházi
Odpoveď na otázku zo zadania znie, že Tomáš je lama a nevie presne rysovať, preto mu uhol zadaných dvoch priamok vyšiel 89,5°. V skutočnosti sú tie dve priamky na seba kolmé. Ako to dokázať? Zrejme táto úloha bola nad sily väčšiny riešiteľov, pretože prišlo len 5 riešení, z nich žiadne nebolo úplne správne. Najbližšie k úspechu bol Vlado Ujházi, ktorý šikovne využil Cevovu vetu. (Čo to je? Nuž je to vzťah, ktorý hovorí o tom, kedy sa tri priamky pretínajú v jednom bode. Ak vás Cevova veta zaujíma viac, skúste si ju vygoogliť, možno o nej niečo zaujímavé nájdete.)
Menej úspešný bol iný nemenovaný riešiteľ Tomáš, ktorý sa dopustil takej istej chyby ako rysujúci Tomáš v zadaní, ale rádovo menšej. Uhol dvoch priamok totiž vyrátal použitím sínusovej a kosínusovej vety a podobných trikov. Vo svojom postupe ale používal nepresné (zaokrúhlené) čísla. Jeho výsledok 90° by teda rovnako mohol byť aj 90,0000000000001°, čo by ale kalkulačka neodhalila.
Ďalší neúspešní riešitelia urobili zhruba toto: Predpokladajme, že uhol tých priamok naozaj je 90°. V obrázku dorátame ďalšie uhly a vidíme, že nevidíme žiaden spor s nám znamymi poznatkami. Toto však nie je korektný dôkaz, v skutočnosti to nie je žiaden dôkaz. Kľudne by ten uhol mohol byť aj iný a keď rovnakým postupom dorátame v obrázku tie isté uhly, tak sa môže stať, že žiaden spor s nám známymi poznatkami nevidíme. Čo potom? Uhol má hocijakú veľkosť?
Úloha však nebola nevyriešiteľná. Prezradím len toľko, že existuje riešenie, ktoré šikovne využíva len vlastnosti rovnoramenných a rovnostranných trojuholníkov a nepotrebujete v ňom žiadne ťažké vedomosti („vety s menami“). Do obrázka však treba dokresliť ešte niekoľko užitočných úsečiek a trojuholníkov a využiť vzťahy typu: Tieto dva uhly sú zhodné, preto tento trojuholník je rovnoramenný, takže tieto dve úsečky sú rovnako dlhé. Potom aj tieto dve úsečky sú rovnako dlhé, a teda aj tento trojuholník je rovnoramenný. Potom tieto dva uhly sú zhodné, a tak veľkosť tohto uhla je toľkoto. A tak ďalej. Skúste to! Kto vymyslí pekné riešenie, má u mňa zmrzlinový pohár!!!

Konečné poradie Letného semestra 30. ročníka STROMu

P.	Meno	Trieda	Škola	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	H	P	CS
1.	Vladislav Ujházi	Sexta	GHronRV	5	5	-	5	5	5	5	-	5	-	5	5	5	5	5	4	7	4	64
2.	Michaela Mokcsayová	Sexta A	GDaxnVT	5	4	0	5	5	5	-	4	5	5	4	5	-	4	5	-	2	4	60
3.	Tomáš Kocák	2. A	GPoštKE	5	5	0	5	5	5	5	-	5	4	5	5	-	-	5	2	4	3	59
3.	Martin Melicherčík	Sexta	GPároNR	5	5	4	5	5	-	5	-	5	2	4	5	2	5	5	-	2	4	59
3.	Ondrej Mikuláš	Septima	GHaliLC	5	5	4	5	5	5	-	2	5	4	5	4	5	-	5	-	1	4	59
6.	Katarína Povolná	Sexta	GAlejKE	4	5	4	5	5	5	5	-	5	5	5	5	2	-	5	-	2	0	56
7.	Alexandra Kuncová	Kvinta A	GAlejKE	5	5	5	5	5	-	-	-	5	-	5	-	5	-	5	-	5	0	55
8.	Michal Petrucha	2. AF	GMetoBA	5	5	4	5	5	5	-	-	5	4	5	-	-	-	-	-	3	5	54
8.	Viktor Popovič	Kvarta A	GMudrPO	5	5	2	5	5	-	-	-	5	5	3	5	-	-	-	-	3	4	54
10.	Miroslav Baláž	Sexta	GKomeHÉ	5	3	0	5	4	5	-	-	5	5	3	4	2	-	5	-	1	5	51
11.	Michal Sudolský	3. F	GTajoBB	5	5	-	5	-	5	-	5	5	4	5	4	1	-	-	-	4	3	47
11.	Lenka Matejovičová	Sexta	GGrösBA	5	5	0	5	5	-	-	-	5	1	5	5	2	5	-	-	2	4	47
13.	Nikola Špesová	2. A	GKonšPO	5	5	4	5	5	5	-	-	5	2	5	-	-	-	-	-	4	5	46

P.	Meno	Trieda	Škola	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	H	P	CS
13.	Tomáš Rizman	Kvinta B	GVaršŽA	5	5	-	3	4	-	-	5	4	2	1	3	-	-	0	1	1	4	46
15.	Jakub Vaňo	1. D	GMudrPO	5	4	0	2	3	-	-	-	5	-	5	1	2	-	-	-	1	4	41
16.	Katarína Tureková	2. F	GTajoBB	5	5	4	-	5	1	5	-	4	-	4	2	2	-	-	-	2	3	40
17.	Katarína Magyarová	Septima	GHaliLC	5	5	0	-	3	-	3	-	5	2	5	5	2	-	-	-	0	4	39
17.	Kristína Kovalčíková	Septima B	GVaršŽA	5	5	0	-	5	-	5	-	5	-	5	-	5	-	-	-	0	4	39
17.	Miroslav Liščinský	Kvinta B	GAlejKE	3	5	0	1	5	2	-	-	5	1	0	1	-	1	5	-	0	0	39
20.	Gabriela Vozáriková	2. A	GPoštKE	5	5	0	5	5	-	5	-	-	-	5	-	-	-	5	-	2	3	38
21.	Vladimír Novák	2. A	GPoštKE	2	4	0	4	5	-	3	-	5	2	5	3	0	-	-	-	0	3	36
22.	Viera Cimbáková	Sexta	GŠtudSV	5	3	0	-	5	-	-	3	-	2	5	5	-	-	0	-	1	5	33
22.	Pavol Harminc	Kvinta A	GAlejKE	5	5	-	-	3	-	-	-	5	-	5	-	-	-	-	-	0	0	33
22.	Jakub Jursa	Kvinta A	GAlejKE	5	5	-	-	-	-	-	-	5	3	5	-	-	-	-	-	0	0	33
25.	Vladimír Boža	2. C	GTataPP	2	5	0	3	5	1	2	0	3	1	-	-	2	-	2	1	1	5	32
26.	Martin Polačko	Kvinta A	GAlejKE	5	5	-	-	-	-	-	-	5	-	5	-	-	-	-	-	-1	0	30
26.	Zuzana Harmincová	Septima B	GAlejKE	5	5	-	-	5	-	5	-	-	-	5	-	-	-	5	-	3	0	30
26.	Peter Zavacký	Septima B	GAlejKE	5	5	0	5	3	-	-	-	1	1	0	-	1	4	5	-	1	0	30
29.	Jana Baranová	Kvarta	GAlejKE	5	5	-	-	3	-	-	-	-	-	5	-	-	-	-	-	0	0	28
30.	Radka Selečéniová	3. F	GTajoBB	5	5	-	-	3	-	-	-	5	-	5	-	-	-	-	-	1	3	26
31.	Jakub Zelman	3. B	GGrösBA	5	5	0	-	2	-	-	-	4	-	0	0	-	-	-	1	0	4	21
32.	Zuzana Zatrochová	Kvarta	GAlejKE	5	5	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	18
32.	Karolína Janíková	Septima B	GVaršŽA	3	5	-	-	-	1	-	-	-	-	5	-	-	-	-	-	0	4	18
34.	Dárius Gál	1. A	GPoštKE	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	0	3	13
34.	Erika Rigóová	3. F	GTajoBB	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	5	-	-	-	-	-	0	3	13
36.	Lucia Kažimírová	1. A	GMudrPO	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4	12
37.	Ján Mikula	4. F	GTajoBB	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	3	-	-	-	-	-	0	3	11
38.	Lucia Simanová	Sexta	GGrösBA	0	5	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4	9
39.	Richard Dubiel	2. A	GPoštKE	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	3	8
40.	Veronika Macková	2. A	GAlejKE	2	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	6
41.	Ondrej Budáč	Oktáva	GHaliLC	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-5	4	4
41.	Michal Prusák	4. C	GMudrPO	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-5	4	4
43.	Michal Búzik	2. A	GPoštKE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	3	3
44.	Zuzana Molnárová	Oktáva A	GAlejKE	0	-	0	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-10	0	0

Pohár konštruktérov Letného semestra 30. ročníka STROMu

P.	Skratka	Škola	Počet	Prémia	Body
1.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	12	0	358
2.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	6	3	139
3.	GTajoBB	Gymnázium J. G. Tajovského 25 974 01 Banská Bystrica	5	3	122
4.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	4	4	95
5.	GVaršŽA	Gymnázium Varšavská cesta 1 010 08 Žilina - Vlčince	3	4	91
6.	GHaliLC	Gymnázium Haličská cesta 9 984 03 Lučenec	3	4	90
7.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	3	4	65
8.	GHronRV	Gymnázium P. J.Šafárika akademika Hronca 1 048 01 Rožňava	1	4	60
9.	GDaxnVT	Gymnázium Dr. Daxnera 88 093 13 Vranov nad Topľou	1	4	56
10.	GPároNR	Gymnázium Párovská 1 950 50 Nitra	1	4	55
11.	GMetoBA	Gymnázium Metodova 2 821 08 Bratislava 2	1	5	49
12.	GKomeHÉ	Gymnáz. gen. L. Svobodu Komenského 4 066 51 Humenné	1	5	46
13.	GKonšPO	Gymnázium Konštantínova 2 080 01 Prešov	1	5	41
14.	GŠtudSV	Gymnázium Študentská 4 069 16 Snina	1	5	28
15.	GTataPP	Gymnázium Dominika Tatarku 14 058 19 Poprad	1	5	27

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika v Košiciach
- Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice

Názov: STROM — korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Maj 2006 • Letný semester 30. ročníka (2005/2006)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`