STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj, netrpezlivý riešiteľ!

Pravdepodobne už máš celé poradie preštudované a práve rozmýšľaš, čo si zbaliť na sústredko. (Nezabudni hlavne na dvadsaťkilovú krúžkovú košeľu, bez ktorej sa nezaobídeš. Dámy asi uprednostnia obľúbené šaty s volánikmi, v ktorých vyzerajú táááak neodolateľne). Ešte však chvíľu vydrž. Máme tu pre teba nové ekšn špeciálne rozšírené predvianočné vydanie stromu 2 v 1. Kávovú esenciu vzorákov spolu s poradím podávaj a vychutnávaj pomaly. Podľa lekárov vraj môže spôsobovať nespavosť až do 25. februára. Na dne poradia má horkú chuť. Zjemňuje ju však smotana letných sérií so 16 novými úlohami a vidinou ďalšieho sústredenia. Na obale môžeš nájsť novinku:

AKCIA! Vaše vybrané druhy riešení hľadáme nielen v schránke poštovej, ale aj tej mailovej.

Tešíme sa na vás na sústredení.

Vaši **STROM**isti

Q: What do you call a snowman party?

A: A Snowball!

About math and horses

Lemma: All horses are the same color.
Proof (by induction):
Case $n = 1$: In a set with only one horse, it is obvious that all horses in that set are the same color.
Case $n = k$: Suppose you have a set of $k + 1$ horses. Pull one of these horses out of the set, so that you have k horses. Suppose that all of these horses are the same color. Now put back the horse that you took out, and pull out a different one. Suppose that all of the k horses now in the set are the same color. Then the set of $k + 1$ horses are all the same color. We have k true then $k + 1$ true; therefore all horses are the same color.

Theorem: All horses have an infinite number of legs.
Proof (by intimidation):
Everyone would agree that all horses have an even number of legs. It is also well-known that horses have forelegs in front and two legs in back. $4 + 2 = 6$ legs, which is certainly an odd[1] number of legs for a horse to have! No integer is even and odd at the same time, so no horse have finite number of legs. Equivalently, all horses have an infinite number of legs.

[1] odd – *nepárny*, ale aj *čudný, podivný*

Pokyny pre riešiteľov

Riešiteľmi môžu byť žiaci prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci z nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov.

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Zasielajte ich **poštou (!!!), nie osobne** do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) organizátorom na adresu:

PF UPJŠ, STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice.

S prvou sériou, ktorej riešenia nám posielate, pošlite vyplnenú **prihlášku**. Riešenie každej úlohy píšte na samostatný papier **formátu A4** na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail `strom@strom.sk`, prostredníctvom debaty na našej stránke alebo osobne.

Novinka!!! Odteraz je možné posielať riešenia úloh aj mailom na adresu `strom@strom.sk`. Vaše riešenia musia dôjsť pred polnocou v deň termínu série. Technické problémy na našej či vašej strane nie sú dôvodom na akceptovanie riešení doručených po termíne.

Ak si s nejakou úlohou nebudete vedieť poradiť, no radi by ste i napriek tomu vedeli jej riešenie, pošlite nám riadne A4-ku s hlavičkou a namiesto riešenia nám na ňu napíšte, kde ste pri uvažovaní skončili (resp. sa vám ani nepodarilo odraziť sa…) a my vám na ten hárok papiera ochotne naznačíme riešenie. Nech si matematici naďalej pomáhajú!

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia, za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 5 bodov.
Prvákom sa do poradia započítava päť najlepšie vyriešených úloh spomedzi úloh 1 – 8 + počet bodov za najlepšie vyriešenú úlohu.
Druhákom sa do poradia započítava šesť najlepšie vyriešených úloh spomedzi úloh 1 – 8.
Tretiakom sa do poradia započítava päť najlepšie vyriešených úloh spomedzi úloh 1 až 6 + počet bodov za lepšie vyriešenú úlohu z úloh 7 a 8.
Štvrtákom sa do poradia započítavajú štyri najlepšie vyriešené úlohy spomedzi úloh 1 až 6 + úlohy 7 a 8.

Prémia sa udeľuje podľa školy na konci semestra. Do úvahy sa berie súčet bodov všetkých žiakov danej školy v príslušnom semestri — ak je ten medzi 1 a 50, každý z nich dostane prémiu 5 bodov, medzi 51 a 100 sú to 4 body, atď., medzi 201 a 250 je to 1 bod, nad 250 je to 0 bodov.

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie, za poslanie riešení po termíne a za osobné doručenie riešení. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešení zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrená.

Hlasovanie úloh závisí od zaujímavosti a jedinečnosti vášho riešenia. Radosť vám môže spraviť 1 hlas (prehľadné, jasné riešenie), alebo 2 či 3 hlasy za výnimočné a originálne nápady. Ak nájdete riešenie v literatúre, kladné hlasy si nepripočítate. Naopak, hrôzu budiace riešenia (výzorom, zložitosťou) získajú −1 hlas. Horšie obídu tí, ktorým za odpisovanie strhneme body. Po ich vydelení počtom odpisujúcich dostanú −3 hlasy, po veľkom odpisovaní je to −5 hlasov. Tak hor sa do hľadania pekných riešení, zabudnime na odpisovanie a hrajme sa s matematikou! Riešitelia s najvyšším počtom hlasov budú na konci semestra odmenení.

Sústredenie je pre 32 účastníkov. Je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho podľa záverečného poradia prví desiati riešitelia, ďalších 10 najlepších riešiteľov, ktorých škola je v Košickom alebo Prešovskom kraji a členovia troch najlepších družstiev z Košického (Prešovského) matboja, ktorý sa koná v príslušnom polroku (ak sa koná). Prípadní ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia STROMu; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Na sústredenie však nebudú vôbec pozvaní riešitelia, ktorí získali v príslušnom semestri -2 alebo menej hlasov.

Komentáre k úlohám 2. série 31. ročníka

1. Opravoval: Robko Hajduk **Počet riešiteľov: 25**
Najoriginálnejší riešitelia: Tomáš Kocák

Ach jaj, neviem, čím to je, ale nejako sa nekamarátite s kombinatorikou. To je veľká škoda. Pozrime sa na to, ako sa s týmto príkladom dá popasovať a spomeňme vaše najčastejšie pochybenia.

Úloha pozostáva z dvoch častí. Je veľmi užitočné si uvedomiť, aké informácie máme v zadaní. Prvou je fakt, že máme 196 trimín nášho tvaru (premyslite si, že ak uvažujeme aj iné triminá, je ich dvakrát toľko). Viacerí o tom zapochybovali, preto uveďme, ako sa dá k číslu 196 dopátrať. Ako iste dobre viete, domín je 28, a keď do stredu každého domina vsunieme číslo $0,\ 1,\dots,6$ dostaneme z neho 7 nových trimín (to, že je každé iné, a to, že takto dostaneme všetky, si sami premyslite). Vznikne nám tak $28\cdot 7=196$ trimín.

Druhou informáciou je, že 147 spôsobmi sa dajú vybrať 2 dominá tak, aby sa dali k sebe priložiť. (Overenie ponechám na vás, tento krok ste väčšinou zvládli už pri pokuse o riešenie, či po vyriešení tejto úlohy.) My sa však poďme pozrieť na to, ako sme mohli postupovať pri riešení jednotlivých častí úlohy.

V časti a) sme triminá prikladali tak, že sa dotýkali len jedným svojím políčkom. Presne o to isté šlo pri domine, a tak, ako sme uvažovali, ako rozšíriť domino na trimino, aj tu použijeme ten istý spôsob. Každé domino, prvé i druhé, rozšírime na trimino vsunutím $0,\ 1,\dots,6$ do stredu, napríklad 13 35 $\to$ 103 365. Dostaneme celkovo

$$147\cdot 7^2=7203 \text{ možností.}$$

Určite sme takto na nič nezabudli? A čo dvojica trimín 103 361? Ak by nemali stredný dielik, boli by to dominá, ktoré su rovnaké. Tieto triminá sme pri vyššie popísanom riešení nezapočítali. Takže zoberieme si dve rovnaké dominové kocky. Vieme ich priložiť k sebe tak, aby spĺňali zadanie úlohy, až na detail, že to nie sú triminá. Aj tento detail odstránime, a to tak, že zas si rovnako rozšírime v strede každé domino na trimino. Keďže triminá musia byť rôzne, pre prvé domino mám 7 a pre druhé trimino len 6 možností. Takto to viem spraviť s každým dominom. Netreba zabudnúť, že sme každú možnosť započítali dvakrát (prečo?). Dokopy to je

$$28\cdot\frac{42}{2}=588 \text{ možností.}$$

Spolu to bude $7203+588=7791$ možností, ako vybrať 2 triminá tak, aby sme ich vedeli k sebe priložiť jedným koncom.

Samozrejme, existuje aj niekoľko ďalších ciest, ktorými sa dopracujeme k tomuto výsledku.

Časť b) nie je o nič ťažšia. Rozoberieme postupne dva prípady. Najprv rozoberme možnosť, že triminá na dotýkajúcich sa častiach obsahujú rovnaké čísla v oboch dielikoch (je tam spolu štyrikrát to isté číslo). V tom prípade je 7 možností, aké čísla tam budú. Pre každú z týchto možností máme 7 čísel, ktoré môžeme priložiť k prvému a 6 čísel, ktoré môžeme priložiť k druhému triminu. No opäť sme zarátali každú možnosť dvakrát. Teda dokopy budeme mať

$$7\cdot\frac{42}{2}=147 \text{ možností.}$$

Nepripomína vám toto číslo niečo? :-)
Ostal nám prípad, ak dieliky, ktorými sa dve triminá dotýkajú, obsahujú navzájom rôzne čísla. Týchto možností je 21 (premyslite si, s čím to má súvislosť). Ak si zoberieme konkrétnu dvojicu dielikov, ktorými sa dve triminá dotýkajú, ostáva nám určiť, aké čísla môžeme dať na zostávajúce políčka. Je dôležité uvedomiť si, že ako na jednom, tak i na druhom trimine môže byť ľubovoľné číslo od 0 do 6. Overenie toho, že nedostaneme rovnaké triminá a toho, či niektoré možnosti nezarátame viackrát, nechávam už na vás. Dokopy to bude pre tento prípad

$$21 \cdot 7^2 = 1029 \text{ možností.}$$

Počet možností, že vytiahneme 2 triminá a vieme ich priložiť dvoma dielikmi, je spolu

$$147 + 1029 = 1176 \text{ možností.}$$

Tak vidíte, ani to nebolelo. Spomeniem ešte zopár chýb, ktorých ste sa viacerí dopustili. Najčastejšia chyba bola v časti a), kde ste došli k číslu 8232 (to je počet všetkých trimín, ktoré vieme vytvoriť tak, aby spĺňali našu podmienku). Bohužiaľ, niektoré prípady ste tak zarátali dvakrát (viete, ktoré?). Našli sa i takí, ktorí nás chceli presvedčiť, že v zadaní je chyba. No nepodarilo sa. Tak nabudúce chvíľku skôr prečítať zadanie seminára a ono to pôjde.

2. Opravovala: Zuzka Celuchová **Počet riešiteľov: 42**
Najoriginálnejší riešitelia: Tomáš Kocák, Katka Magyarová

Táto úloha sama osebe nebola priťažká. K správnemu výsledku ste sa dopracovali takmer všetci. K piatim bodom, bohužiaľ, nie. V čom spočíval problém? Nuž, mnohí z vás sa rozhodli, že najvýhodnejšie bude chodiť po trojuholníku po riadkoch a spočítali ste, koľko trojuholníčkov navštívime týmto spôsobom. Tu ale narazíme na problém – vyhlásiť, že je niečo „najlepšie, najefektívnejšie“ apod., je príliš pochybné a neobstojí to bez riadneho dôkazu. To, že sa nám zdá, že je to najlepšie riešenie, ešte neznamená, že naozaj je. Pri malých trojuholníkoch je ľahké si to overiť. Čo ale urobíme s trojuholníkom, kde $n = 10000$? Tu už nevieme, či sa cikcakovitým motkaním po trojuholníku nedostaneme do viacerých trojuholníčkov. . . Pozrime sa teda na to, ako sa dá to, čo sa nám zdá intuitívne jasné, dokázať matematicky.
Riešenie si rozdelíme do dvoch krokov. Najprv ukážeme, že sa nedá navštíviť viac ako n^2-n+1 trojuholníčkov. Pozor, tento krok sám osebe ešte nie je riešením! Rovnako dobre by sme vedeli ukázať, že nevieme prejsť viac ako n^{10} trojuholníčkov, to ale ešte neznamená, že ich skutočne navštívime toľko. Preto potrebujeme ešte druhý krok, a to ukázať, že naozaj existuje taký spôsob chodenia po trojuholníku, že navštívime $n^2 - n + 1$ malých trojuholníčkov. Potom je úloha vyriešená.
Všimnime si usporiadanie trojuholníčkov vo veľkom trojuholníku. Niektoré sú otočené „nadol“, niektoré „nahor“. Aby sme ich odlíšili, ofarbime ich rôznymi farbami. Nech napr. trojuholníčky otočené nadol sú biele, ostatné čierne. Prečo to robíme? Dôvod je jednoduchý. Keď sa trochu zamyslíme, prídeme na to, že pri každom kroku vieme prejsť len z bieleho trojuholníčka do čierneho alebo naopak (nikdy nie biely-biely alebo čierny-čierny). Tento poznatok nám ďalej veľmi pomôže.
Počet bielych trojuholníčkov je $n(n-1)/2$. Čiernych je $n(n+1)/2$, teda o n viac ako bielych (skúste si premyslieť, ako sme došli k týmto hodnotám!). Na začiatku sme v čiernom trojuholníčku a v každom kroku musíme zmeniť farbu. Predstavme si, že by sa nám podarilo prejsť všetky biele trojuholníčky. Koľko sme pri tom museli prejsť čiernych trojuholníčkov? Správne, rovnako veľa, farby sa predsa striedajú! Vieme ešte pokračovať ďalej? Bohužiaľ, nemáme už ďalšie biele trojuholníčky, viac krokov teda nevieme urobiť. Môžeme ešte urobiť posledný ťah – prejsť z posledného bieleho trojuholníčka do nejakého čierneho. . . a koniec. Takto sme prešli čiernych trojuholníčkov o 1 viac ako bielych, a teda neprešli sme presne $n - 1$ trojuholníčkov

(akej farby?). Ľahkou úvahou sa dá zistiť, že všetkých trojuholníčkov je n^2, a teda maximálny možný počet navštívených trojuholníčkov môže byť $n^2 - (n-1) = n^2 - n + 1$.
No a triumfálny záver – nájdeme nejaký spôsob, ako skutočne navštíviť toľko trojuholníčkov. To sa väčšine z vás podarilo, je to napr. už spomínané chodenie postupne po riadkoch, pričom vždy na konci riadka vynecháme jeden trojuholníček, z ktorého by sme sa potom nevedeli dostať. Hotovo! Nenechajte sa odradiť malým počtom bodov, nabudúce si už na podobné úlohy isto dáte pozor a budete vedieť, ako na ne.

3. Opravoval: Kuiso **Počet riešiteľov: 15**
Najoriginálnejší riešitelia: Viktor Popovič, Monča Vaľková
Načrtnem jedno z najlepších riešení.
Je jasné, že máme po 4 deti z dvoch škôl a po 3 deti z ďalších ôsmich škôl. Rozdelíme deti do 4 družín nezávisle na pohlaviach tak, aby v každej družine bolo 8 ľudí a v žiadnej neboli dvaja z jednej školy. Dá sa to napríklad tak, že z tých prvých dvoch škôl (z ktorých sú po 4 deti) dáme do každej družiny jedného. Účastníkov z ďalších dvoch škôl (ktorí sú z každej traja) dáme do každej družiny okrem prvej, z ďalších dvoch do každej okrem druhej, z ďalších dvoch do každej okrem tretej a z posledných dvoch do každej okrem štvrtej.
Teraz ešte potrebujeme zaručiť, že všade budú štyria chlapci a štyri dievčatá. Kým existuje družina s aspoň piatimi dievčatami, opakujeme toto: Vezmeme družinu, kde je minimum chlapcov, nech je to družina A. Ak počet chlapcov v A je 4, skončili sme. Ak v družine A ich je menej ako 4, určite existuje družina, v ktorej je aspoň 5 chlapcov. Nech je to B. Teraz nájdeme vhodné dievča v A a vhodného chlapca v B a vymeníme ich. Ako nájsť vhodné dievča v A a vhodného chlapca v B? Z akých škôl môžu byť tí dvaja, aby boli vhodní? Ak sú z tej istej školy, je to v poriadku. (Takých škôl je 6 pre daný pár A a B.) Druhá možnosť je, keď sú z takých škôl, že v tej druhej družine nie je nikto z tej školy. (Také sú zvyšné školy.) Teraz si už len rozmyslíme, že vhodný pár na výmenu vždy existuje.
Pozrime sa na príklad. Máme školy DDDD, DDDD, DDC, DDC, DDC, DCC, DCC, CCC, CCC, CCC. Rozdelíme ich napr. ako na obrázku 1. (Stĺpce reprezentujú družiny, riadky zase školy).

D	D	D	D
D	D	D	D
D	D	C	nikto
D	D	C	nikto
D	D	nikto	C
D	C	nikto	C
D	nikto	C	C
C	nikto	C	C
nikto	C	C	C
nikto	C	C	C

Obrázok 1.

D	D
D	D
D	C
D	C
D	nikto
D	nikto
D	C
C	C
nikto	C
nikto	C

Obrázok 2.

Vezmeme družinu s aspoň 5 dievčatami (teraz vezmeme prvý stĺpec, označme ho A) a vezmeme družinu s najviac 3 dievčatami (napríklad tretí stĺpec, označme ho B). Vyzerá to ako na obrázku 2.
Práve 6 riadkov je takých, že máme v oboch stĺpcoch niekoho, 2 sú také, že len v prvom stĺpci je niekto, 2 sú také, že len v druhom stĺpci je niekto.
Máme aspoň 5 dievčat v prvom stĺpci, najviac 3 dievčatá v druhom stĺpci. Ak existuje riadok DC, tak ho zmeníme na CD a pokračujeme (hľadáme opäť družinu s aspoň 5 dievčatami). Ak existujú dva riadky takéto: D-nikto a nikto-C, tak ich zmeníme na nikto-D a C-nikto a pokračujeme. Takto sa nám upravia chlapci-dievčatá a školy sa nerozhádžu.

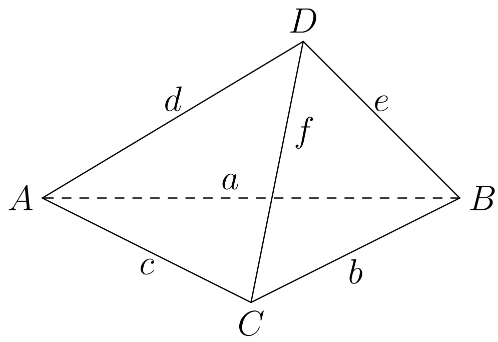
Ostáva ukázať, že vhodný riadok nájdeme. Ak žiadny z tých 6 riadkov, kde sú dvaja, nie je DC, tak môžu byť DD, CC alebo CD. Riadkov CD a CC spolu môže byt najviac 3 (v prvom stĺpci sú najviac traja chlapci), riadkov DD a CD môže byť najviac 3 (v druhom stĺpci sú najviac tri dievčatá).
Preto jediná možnosť, kedy nemáme DC riadok je, keď máme práve 3 CC a práve 3 DD riadky. potom ale zvyšné riadky vyzerajú takto: D-nikto, D-nikto, nikto-C, nikto-C a teda nájdeme dvojicu druhého druhu.

Úloha vám tentokrát narobila problémy. Nezabúdajte, že návod mal byť jasný a zrozumiteľný. Ak sa vám podarilo napísať nejaký návod, tak už nikto z vás nevysvetlil, prečo týmto návodom dosiahneme požadovaný cieľ.
Napríklad často sa objavilo takéto riešenie. Rozdelíme tie družiny so štyroma, a školy postupne dopĺňame tak, že rozdiel počtu chlapcov (alebo dievčat) medzi dvoma družinami nie je väčší ako dva. Že sa to naozaj dá tak dosiahnúť a že sa to nepokazí na konci, kde to už nepôjde, tým sa nikto nezaoberal. Na otázku, či to naozaj ide, doteraz nepoznáme odpoveď, keďže sa nikto neunúval to vysvetliť.
Zaujímavosťou je, že zrejme ;) by stačilo dokonca také riešenie, že by profesor usporiadal deti do radu a prvých osem detí by tvorilo prvú družinu, ďalších osem druhú a tak ďalej. Skontroloval by, či sedia podmienky, a ak nie, deti poprehadzuje. Ak vyskúša všetky rôzne poradia z týchto 32 detí, tak určite nájde vhodné družiny. (Prípadné zistí, že sa to takto rozdeliť nedá.) Už len správne popísať, ako sa menia tie poradia a že sa preskúšajú všetky a je to. Jediný zádrheľ by mohlo spôsobiť to, že týchto 32! možností, by musel preskúšať pán profesor, čo asi nie je v ľudských silách. Teoreticky je aj toto riešenie správne (aj keď značne neefektívne a nepraktické).
Nezabúdajte teda, že ak máte prísť na nejaký návod, nestačí ho len vymyslieť. Treba aj vysvetliť, prečo práve takýto návod funguje. Je to to isté, ako keď pri nejakej rovnici nepíšete len to, že $x = 4$, ale aj spôsob, ako ste na to prišli a prečo je to pravda.

4. Opravoval: Darko Gál **Počet riešiteľov: 38**
Najoriginálnejší riešitelia: Jana Baranová, Vladislav Ujházi
Úloha bola jednoduchá a pustilo sa do nej veľa riešiteľov. To ale neznamená, že boli všetky riešenia úplne správne. Bolo potrebné dokázať *ekvivalenciu.* To znamená, že dôkaz sa skladal z dvoch častí – dokazovali sme dve implikácie.
Bolo jednoduchšie dokázať, že ak $|CE| = |CA|$, potom $|DE| = |AB|$. Často ste sa dopúšťali takejto nepresnosti: odvolávajúc sa na vetu *usu* prehlásili ste zhodnosť trojuholníkov ABC a EDC na základe rovnosti dĺžok $|AC|$ a $|EC|$ a rovnosti veľkostí uhlov BAC, DEC a ABC, EDC. Toto je síce pravda, ale veta *usu* hovorí o uhloch ležiacich pri tých zhodných stranách, čo nie je náš prípad.
Kto sa pustil do dokazovania druhej implikácie, ten ju väčšinou aj správne vyriešil. Síce bolo v tejto časti dôkazu menej chýb, ale mnohí z vás sa k nej nedostali. Prečo? Ešte stále nie je neskoro skúsiť to...

5. Opravovala: Katka Kvašňáková **Počet riešiteľov: 28**
Najoriginálnejší riešitelia: Tomáš Kocák, Vladislav Ujházi, Martin Melicherčík
Mnohí ste správne vytušili, že štvorsten bez magických vrcholov neexistuje. Poďme to dokázať. Označme najdlhšiu hranu štvorstena a a jej krajné vrcholy A a B. Zvyšné dva vrcholy štvorstena označme C, D a hrany b, c, d, e a f (ako na obrázku). Aby sme vedeli štvorsten zostrojiť, musia hrany jeho stien spĺňať trojuholníkové nerovnosti. Všeobecne pre trojuholník so stranami x, y a z musia byť splnené tri nerovnosti: $x + y > z$, $x + z > y$ a $y + z > x$. Ak však vieme, ktorá strana v trojuholníku je najdlhšia, nech je to x, potom stačí, aby platilo $y + z > x$ a zvyšné dve nerovnosti platia z toho, že x je najdlhšia strana. V trojuholníku ABC

musí preto platiť $b + c > a$ a v trojuholníku ABD zase $d + e > a$. Sčítaním týchto dvoch nerovností dostaneme nerovnosť $(b+c)+(d+e) > 2a$, alebo inak $(b+e-a)+(c+d-a) > 0$. (Prečo sme si to takto preusporiadali?)



Aby platila posledne spomínaná nerovnosť, teda aby súčet dvoch čísel v zátvorkach bol kladný, musí byť aspoň jedno z čísel $b+e-a$ alebo $c+d-a$ kladné. Teraz je dôležité si uvedomiť, že sme už len krôčik od riešenia. Ak $b+e-a$ je kladné, platí nerovnosť $b+e > a$ a teda trojuholník so stranami a, b a e sa dá zostrojiť, keďže a je najdlhšia strana a zvyšné dve trojuholníkové nerovnosti preto platia. Hrany a, b a e vychádzajú z bodu B a preto je bod B magickým vrcholom. Ak $b+e-a$ nie je kladné číslo, potom musí byť kladné $c + d - a$. Potom však z podobných dôvodov je bod A magickým vrcholom, keďže hrany c, d a a z neho vychádzajú a je pre ne splnená trojuholníková nerovnosť (dobre si to premyslite). V každom prípade musí byť aspoň jeden vrchol pri najdlhšej hrane štvorstena magický. Štvorsten, ktorý nemá magický vrchol, teda neexistuje.

Úlohu ste mnohí zvládli veľmi pekne. Niektorí sa trochu zamotali v nerovnostiach. Aj keď boli na dobrej ceste, odbočiek a nerovností bolo veľa... Bodíky sa strhávali, aj keď ste niektoré možnosti odbili tvrdením, že je to analogické. Hoci tam analógia bola, pri mnohých nerovnostiach nie je až taká viditeľná a bola dosť podstatnou časťou príkladu. Pár z vás bohužiaľ pochopilo zle zadanie :(. Nehľadali sme totiž štvorsten, ktorý má nemagický aspoň jeden vrchol, ale všetky vrcholy. Inak veľmi oceňujem rozmanitosť a nápaditosť vašich riešení. Len tak ďalej.

6. Opravoval: Dávid Hudák **Počet riešiteľov: 25**

Najoriginálnejší riešitelia: Ondrej Mikuláš, Dávid Štrbka, Miroslav Baláž

Úloha zaujala len približne polovicu z vás, no nebola veľmi zložitá. Potrebovali ste dokázať, že medzi 200 študentmi existuje dvojica, ktorá má spolu vyriešené všetky úlohy. Mohli ste to riešiť rôzne. Ukážeme si dve možnosti. Prvá bude riešením väčšiny z vás a druhá bude tak trochu poučnejšia. Tak poďme na to.

1. Nech niektorý študent vyriešil všetkých 6 úloh. S kýmkoľvek spolu vyriešili všetky úlohy, hotovo. Ak taký nie je, predpokladajme, že existuje študent, ktorý vyriešil 5 úloh. Keďže každú úlohu vyriešilo aspoň 120 študentov, tak aj tú našu zvyšnú vyriešilo 120 študentov a z nich si vezmeme jedného.

Nech teda nie je ani študent s piatimi vyriešenými úlohami. Čo potom? Predpokladajme, že máme študenta, ktorý vyriešil 4 úlohy. Teda nevyriešil 2 úlohy. Označme tieto nevyriešené úlohy A, B. Stačí nám nájsť človeka, ktorý vyriešil úlohy A, B. Podľa zadania vieme, že každú z úloh A, B vyriešilo aspoň 120 študentov. Nemôžu však byť všetci rôzni, pretože my máme len 200 študentov. To značí, že aspoň 40 študenov vyriešilo obe. Takže jeden z nich spolu so študentom, čo vyriešil tie ostatné 4 úlohy, dávajú hľadanú dvojicu.

Teraz nám už len zostáva ukázať, že vždy existuje študent, ktorý mal vyriešené 4 úlohy. Poďme na to sporom. Keby taký nebol, tak by všetci študenti vyriešili najviac 3 úlohy, spolu to dá najviac $200 \cdot 3 = 600$ riešení. No každú úlohu vyriešilo aspoň 120 študentov, a to je spolu aspoň $6 \cdot 120 = 720$ riešení. Spor. A tým je dôkaz hotový.

2. Aj teraz pôjdeme na to sporom. Predpokladajme, že neexistuje taká dvojica, ktorá vyriešila spolu všetkých 6 úloh. Inak povedané, v každej dvojici obaja nevyriešili aspoň jeden rovnaký príklad. Vezmime si konkrétne úlohu 1. Tú vyriešilo aspoň 120 študentov a teda nevyriešilo najviac 80 študentov. Z nich vieme vytvoriť najviac $\binom{80}{2}$ dvojíc. Z týchto dvojíc žiadna nevyriešila

prvú úlohu. Podobne pre úlohy 2 až 6 existuje najviac $\binom{80}{2}$ dvojíc s nevyriešenou danou úlohou. Spolu teda máme najviac $6 \cdot \binom{80}{2} = 18960$ dvojíc, ktoré nevyriešili nejakú úlohu. Ale súťaže sa zúčastnilo 200 študentov a z nich vieme vytvoriť $\binom{200}{2} = 19900$ dvojíc, čo je hľadaný spor.
Čo poviete? Poučné, však? Prišli aj iné zaujímave riešenia, za čo vám patrí pochvala. Body som musel strhávať len za nepresvedčivú argumentáciu a za overenie jediného konkrétneho prípadu rozdelenia riešiteľov. Inak som bol spokojný.
Skúste sa zamyslieť nad číslom 200 v zadaní. Nakoľko ho môžeme zmenšiť, aby stále zostalo v platnosti pôvodné tvrdenie? Ktorou z uvedených metód vieme dokázať silnejšie tvrdenie? (Čím menším číslom vieme nahradiť číslo 200, tým lepšia je metóda v tomto prípade.)

7. Opravoval: Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 17**
Najoriginálnejší riešitelia: Martin Melicherčík, Aďa Szilágyiová, Gaba Vozáriková

Nebol to ťažký príklad a potrápili ste si svoje mozočky celkom úspešne. Menšina z vás, ktorá taká úspešná nebola, si musí dať pozor na to, aby nevyvodzovala dôsledky iba na základe obrázka. Obrázok je v geometrii nápomocný, lebo nám pomáha uvedomiť si skutočnosti, ktoré zo zadania nemusia byť úplne zrejmé. Pozor však na to, aby sme sa ním nedali príliš zviesť. Napríklad ak prehlásime, že tieto dve priamky sú rovnobežné, lebo „to tak vyzerá na obrázku", to ešte neznamená, že to tak naozaj je. Aby sme sa o tom skutočne presvedčili, musíme to dokázať. (Pri dôkaze môžeme využiť trebárs striedavé uhly.)
A ako sa dal tento príklad vyriešiť? Rozoberme si prípad, kedy je tetiva XY bližšie k bodu A ako k bodu B (prípad, kedy je XY bližšie k bodu B ako A, sa rieši podobne). Postupovať sa dá rôznymi spôsobmi. Jedným z nich je ukázať, že trojuholníky AXM a LMK sú zhodné. Ak sa to podarí, sme za vodou, lebo vieme (z Tálesovej kružnice), že $|\sphericalangle AXM| = |\sphericalangle KML| = 90°$. Označme veľkosti uhlov LBM a YAX písmenami α a β.
Zo zadania je zrejmé, že $KLBM$ je rovnobežník. Teda $|LB| = |KM|$ a $|LK| = |BM|$. Ďalej $|\sphericalangle LBM| = |\sphericalangle LKM|$ a $|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle XMA|$, preto $|\sphericalangle XMA| = |\sphericalangle LKM| = \alpha$. Na základe zavedeného označenia platí $\alpha + \beta = 180°$ (zo štvoruholníka $AYBX$) a $|\sphericalangle MBA| = \alpha/2$. Keďže $KL \parallel MB$, tak $|\sphericalangle AKL| = |\sphericalangle AMB| = \beta$, a z toho vieme dopočítať veľkosť uhla MAB. Dostaneme, že $|\sphericalangle MAB| = |\sphericalangle MBA| = \alpha/2$. To znamená, že trojuholník AMB je rovnoramenný, preto $|AM| = |MB|$. Jednoducho pomocou zavedených uhlov sa dokáže, že aj trojuholník KMX je rovnoramenný a že platí $|KM| = |XM|$. Ak si to zhrnieme, tak zistíme, že platí $|\sphericalangle XMA| = |\sphericalangle LKM|$, $|AM| = |KL|$ a $|XM| = |MK|$. Preto sú trojuholníky AMX a LMK zhodné. Majte sa pekne a do zgeokakavenia.

8. Opravovala: Jana Mihalčová **Počet riešiteľov: 7**
Najoriginálnejší riešitelia: Michaela Mokcsayová

Za pokus by stálo preveriť na počítači, či tvrdenie platí. Čísla p, q sú však veľmi veľké a zďaleka nie je ľahké naprogramovať to. Priamy výpočet čísel p, q sa dá obísť pomocou istých poznatkov z teórie čísel, doporučujeme vyskúšať si to.
Ťažko povedať, ako súvisí ten výraz v zadaní s číslom 3011. Môžeme skúsiť tipovať ($3011 - 2007 = 1004$, čo je takmer presne polovica z 2007) alebo sa snažiť zjednodušiť zadaný výraz. Vyberieme sa druhou cestou. V prvom rade sa zbavíme striedavých znamienok. Označme

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

tento výraz sa nám tu často vyskytuje (H_n nazývame n-tý čiastočný súčet harmonického radu, všimnite si súvis s harmonickým priemerom). Označme výraz zo zadania V. Platí

$$V + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2006}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2007} = H_{2007}.$$

Preto

$$V = H_{2007} - H_{1003} = \frac{1}{1004} + \cdots + \frac{1}{2007}.$$

Teraz použijeme obrat častý v teórii čísel. Využijeme, že $1004 + 2007 = 3011$ a popárujeme členy do dvojíc: prvý s posledným, druhý s predposledným a tak ďalej. Zrejme súčet čísel v jednotlivých dvojiciach je zlomok, ktorý má v čitateli 3011 a v menovateli súčin čísel menších ako 3011. Preto súčet všetkých týchto zlomkov bude mať v čitateli prvočíslo 3011, ktoré nebude v menovateli a nevykráti sa. Skúste si vyriešiť nasledujúce úlohy:

1. Dokážte, že pre každé prvočíslo $p > 3$ je čitateľ zlomku H_{p-1} v základnom tvare deliteľný číslom p. Zistite, či je deliteľný aj číslom p^2.
2. Číslo p je prvočíslo práve vtedy, keď platí $p \mid (p-1)! + 1$. Dokážte.

A na záver máme pre vás ešte niečo na pobavenie.

A mathematician organizes a lottery in which the prize is an infinite amount of money. When the winning ticket is drawn, and the jubilant winner comes to claim his prize, the mathematician explains the mode of payment: „1 dollar now, 1/2 dollar next week, 1/3 dollar the week after that…“

Konečné poradie Zimného semestra 31. ročníka STROMu

P.	Meno	Trieda	Škola	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	H	P1	CS
1.	Vladislav Ujházi	Septima	GHronRV	5	5	5	5	5	-	5	-	5	5	-	5	5	5	5	-	4	4	64
2.	Martin Melicherčík	Septima	GPároNR	4	5	5	5	5	-	4	-	5	5	-	5	5	5	5	-	4	4	62
3.	Miroslav Baláž	Septima	GKomeHÉ	4	5	5	5	5	1	-	4	4	5	-	4	5	5	-	5	0	4	60
4.	Tomáš Kocák	3. A	GPoštKE	4	4	5	5	4	5	5	-	5	5	-	5	5	5	-	5	6	0	58
5.	Gabriela Vozáriková	3. A	GPoštKE	5	5	5	5	5	-	4	-	4	5	-	5	4	3	5	-	1	0	55
6.	Viktor Popovič	Kvinta A	GMudrPO	5	5	5	5	5	1	3	-	2	2	3	5	3	-	-	-	1	3	53
7.	Michaela Mokcsayová	Septima A	GDaxnVT	3	5	5	5	5	-	2	-	4	4	-	2	2	5	0	5	3	5	52
8.	Tomáš Rizman	Sexta B	GVaršŽA	2	4	5	4	5	5	0	-	2	3	2	5	5	4	-	-	0	4	50
9.	Michal Maixner	Sexta B	GVaršŽA	2	5	4	5	4	1	-	-	-	3	1	5	5	5	4	-	1	4	48
9.	Adriána Szilágyiová	3. A	GPoštKE	4	5	5	5	5	-	-	-	5	4	-	5	-	5	5	-	1	0	48
11.	Nikola Špesová	3. A	GKonšPO	2	5	5	5	-	-	-	-	2	4	-	5	5	4	-	5	0	5	47
11.	Ondrej Mikuláš	Oktáva	GHaliLC	5	4	5	5	-	-	-	-	-	5	-	5	5	5	4	-	3	4	47
13.	Martin Vdovičenko	Septima	GPároNR	4	5	5	5	5	-	-	-	4	3	-	3	3	3	2	-	1	4	46
14.	Juraj Mitro	Kvinta A	GMudrPO	-	5	5	5	3	2	-	-	-	2	-	3	3	3	-	-	1	3	42
14.	Alexandra Kuncová	Sexta A	GAlejKE	3	5	5	5	5	-	-	-	4	5	-	5	5	-	-	-	2	0	42
16.	Jana Baranová	Kvinta	GAlejKE	4	5	5	5	0	1	-	-	1	4	1	5	-	-	-	-	1	0	41
16.	Michal Petrucha	3. AF	GMetoBA	5	5	5	5	-	-	-	-	-	5	-	3	4	4	-	-	1	5	41
18.	Dávid Štrbka	Septima	GGrösBA	2	5	5	5	5	-	4	-	-	3	-	2	1	3	3	-	2	2	40
19.	Samuel Hapák	Septima	GGrösBA	4	5	4	4	-	5	1	-	-	-	5	3	-	5	-	-	1	2	38
20.	Peter Smolárik	1. A	GPoštKE	4	5	5	5	-	3	-	-	-	2	-	-	-	4	-	-	0	0	37
21.	Katarína Magyarová	Oktáva	GHaliLC	2	5	3	-	-	-	-	-	4	5	3	4	-	-	4	1	0	4	35
22.	Vladimír Novák	3. A	GPoštKE	2	4	5	5	5	2	5	-	-	-	-	5	-	-	3	-	0	0	34
22.	Jakub Jursa	Sexta A	GAlejKE	4	5	5	5	-	-	-	-	-	5	-	5	5	-	-	-	2	0	34
24.	Katarína Povolná	Septima	GAlejKE	5	5	5	5	3	-	3	0	0	2	-	3	-	2	-	-	0	0	33
24.	Peter Zavacký	Oktáva B	GAlejKE	2	4	5	5	-	-	4	-	-	3	-	2	1	3	4	-	1	0	33
26.	Jakub Vaňo	2. D	GMudrPO	-	5	5	5	-	1	1	-	1	2	3	5	-	-	-	-	2	3	31
26.	Zuzana Cocuľová	1. A	GPoštKE	2	1	5	5	0	1	-	2	-	2	3	1	-	1	1	1	1	0	31
28.	Miroslav Liščinský	Sexta B	GAlejKE	-	4	5	5	-	-	-	-	5	2	-	5	3	-	-	-	0	0	29
29.	Eduard Eiben	2. A	GPoštKE	-	4	5	5	-	1	-	-	3	2	4	2	1	-	-	-	0	0	27
29.	Andrea Görcsösová	Kvinta	GAlejKE	2	3	3	5	-	-	-	-	1	2	-	3	-	-	-	-	0	0	27
31.	Dávid Vendel	2. A	GPoštKE	0	4	5	5	-	1	-	-	3	2	0	3	3	-	-	-	1	0	26
31.	Tomáš Kuzma	Sexta A	GAlejKE	5	5	5	3	-	-	-	-	-	3	-	5	-	-	-	-	0	0	26
31.	Zuzana Zatrochová	Kvinta	GAlejKE	2	5	4	3	-	2	4	-	-	1	1	-	-	-	-	-	0	0	26
34.	Martin Polačko	Sexta A	GAlejKE	2	4	5	4	-	-	-	-	0	5	-	5	-	-	-	-	0	0	25
35.	Monika Vaľková	Kvinta	GAlejKE	2	-	5	5	-	-	-	-	-	1	2	2	-	-	-	-	1	0	24
36.	Michal Pavlovský	Septima	GGrösBA	3	3	5	5	1	-	1	-	-	2	1	0	0	-	0	0	0	2	23
37.	Judita Hodásová	Sexta	GGrösBA	3	2	5	5	-	-	-	-	-	0	2	-	-	3	-	-	0	2	22
38.	Pavol Široczki	4. B	GŠkolMB	1	4	5	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5	20
39.	Viera Cimbáková	Oktáva	GŠtudSV	4	-	5	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5	19

P.	Meno	Trieda	Škola	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	H	P	CS
40.	Zuzana Harmincová	Oktáva B	GAlejKE	4	4	5	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	0	18
40.	Michal Sudolský	4. F	GTajoBB	2	4	5	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5	18
40.	Marián Dobranský	2. E	GPoštKE	1	1	5	-	4	0	1	1	-	1	-	1	1	-	2	-	0	0	18
43.	Lucia Simanová	Septima	GGrösBA	2	5	1	-	-	-	-	-	1	-	-	5	1	-	-	-	0	2	17
43.	Miloš Selečéni	1. F	GTajoBB	-	-	5	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	0	5	17
45.	Tomáš Petráš	3. A	GPoštKE	2	4	5	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	13
45.	Peter Dekický	4. B	GGrösBA	-	-	4	5	-	-	-	-	-	1	-	-	0	1	-	-	0	2	13
45.	Lucia Kažimírová	2. A	GMudrPO	1	-	5	1	-	-	-	-	0	-	-	-	-	3	-	-	0	3	13
48.	Jakub Zelman	4. B	GGrösBA	-	2	5	-	-	-	-	-	0	-	3	-	0	-	-	-	0	2	12
49.	Miriam Kopásková	Kvinta M	GŠtúrMI	-	-	3	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5	11
50.	Veronika Macková	3. A	GAlejKE	-	3	5	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	10
50.	Matúš Benko	3. D	GMudrPO	-	-	5	-	-	-	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	0	3	10
52.	Zuzana Kaľavská	3. A	GPuškKE	1	-	3	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	0	-	-	0	5	9
53.	Milan Bartoš	2. A	GPoštKE	-	-	-	-	-	-	-	-	2	1	-	1	1	2	1	-	0	0	8
54.	Libuša Révészová	2. A	GPoštKE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	3	1	-	1	-	0	0	7
54.	Pavol Harminc	Sexta A	GAlejKE	2	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	7

Pohár konštruktérov Zimného semestra 31. ročníka STROMu

P.	Skratka	Škola	Počet	Prémia	Body
1.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	14	0	375
2.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	12	0	362
3.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	7	2	151
4.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	5	3	134
5.	GPároNR	Gymnázium Párovská 1 950 50 Nitra	2	4	100
6.	GVaršŽA	Gymnázium Varšavská cesta 1 010 08 Žilina - Vlčince	2	4	90
7.	GHaliLC	Gymnázium Haličská cesta 9 984 03 Lučenec	2	4	74
8.	GHronRV	Gymnázium P. J.Šafárika akademika Hronca 1 048 01 Rožňava	1	4	60
9.	GKomeHÉ	Gymnáz. gen. L. Svobodu Komenského 4 066 51 Humenné	1	4	56
10.	GDaxnVT	Gymnázium Dr. Daxnera 88 093 13 Vranov nad Topľou	1	5	47
11.	GKonšPO	Gymnázium Konštantínova 2 080 01 Prešov	1	5	42
12.	GMetoBA	Gymnázium Metodova 2 821 08 Bratislava 2	1	5	36
13.	GTajoBB	Gymnázium J. G. Tajovského 25 974 01 Banská Bystrica	2	5	25
14.	GŠkolMB	Gymnázium Š. Moyzesa Školská 13 045 17 Moldava nad Bodvou	1	5	15
15.	GŠtudSV	Gymnázium Študentská 4 069 16 Snina	1	5	14
16.	GŠtúrMI	Gymnázium Ľudovíta Štúra 26 071 01 Michalovce	1	5	6
17.	GPuškKE	Evanjelické gymnázium Puškinova 3 040 01 Košice	1	5	4

Zadania úloh Letného semestra 31. ročníka

3

Tretia séria
Úlohy pripravili: vedúci STROMu
Termín odoslania riešení: **12. marec 2007**

1. Janka si nakreslila pravouhlý trojuholník PAF s pravým uhlom pri vrchole A a so stranami dlhými 3 cm, 4 cm a 5 cm. Do neho vpísala štvorec, čím rozdelila pôvodný trojuholník na tri malé trojuholníky a jeden štvoruholník. Malému trojuholníku pri vrchole A vpísala kružnicu. Aký bol polomer tejto kružnice?

2. Tomáš za zúčastnil na majstrovstvách Slovenska v sudoku. Na súťaži bolo 100 účastníkov, z ktorých bol v sudoku každý inak zdatný. Súťažili každý s každým práve raz. Niektorí z nich podvádzali, v *jednom* z ich zápasov použili zázračnú mašinku, ktorá vedela sama vyriešiť sudoku rýchlejšie ako ktorýkoľvek hráč. Ak v zápase použil iba jeden hráč zázračnú mašinku, tak vyhral, v ostatných prípadoch vyhral ten lepší. Na konci súťaže sa zistilo, že traja súťažiaci získali viac víťazstiev ako traja najlepší hráči. Koľko najmenej súťažiacich podvádzalo?

3. Robko si nakreslil na papier 64 bodov. Potom začal hľadať také trojice bodov, ktoré tvoria pravouhlý trojuholník. Je možné, aby Robko našiel viac ako 2007 takýchto trojíc? (Úlohou *nie je* nájsť situáciu, v ktorej Robko tých 2007 trojíc nenájde.)
Prémia za čokoládu: Koľko najviac pravouhlých trojuholníkov mohol Robko dostať?

4. Maruša s Dorou sa zas pohádali. Maruša tvrdila, že jej jej milý Ďuro daroval teleso so šiestimi trojuholníkovými a tromi päťuholníkovými stenami. Dora zas, že jej jej Kubo doniesol teleso so šiestimi trojuholníkovými a dvoma päťuholníkovými stenami. Ktorá z nich hovorila pravdu?

5. Janka a Danka hrajú na šachovnici hru na zajaca a líšky. Janka má jednu figúrku – zajaca, Danka má dve figúrky – líšky. Všetky figúrky môžu ťahať na susedné políčka (stranou). Zajac môže vyjsť mimo šachovnice, pokiaľ je na kraji, čím vyhráva. Ak sa ocitnú zajac s líškou na jednom políčku, vyhrávajú líšky. Janka má jeden ťah zajacom, Danka ťahá všetkými líškami. Janka začína. Zajac je na vnútornom políčku šachovnice. Možno na začiatku, ak poznáme počiatočnú polohu zajaca, položiť dve líšky na krajné políčka šachovnice tak, aby chytili zajaca?

6. Dávid si spomenul na svoje tri obľúbené kladné čísla. Označme si ich tajne t, a, j. Je pravda, že pre Dávidove obľúbené čísla neplatí aspoň jedna z nerovností

$$t(1-a) > \frac{1}{4}, \qquad a(1-j) > \frac{1}{4}, \qquad j(1-t) > \frac{1}{4} \quad ?$$

7. Keď sa Janko hrabal v starej škatuli deda vševeda, našiel tam starý ošumelý príklad. Je daný trojuholník ABC s najmenším uhlom pri vrchole A. Kružnica opísaná trojuholníku ABC je rozdelená bodmi B, C na dva oblúky. Nech D je ľubovoľný bod na oblúku neobsahujúcom bod A. Osi úsečiek AB a AC pretínajú AD v bodoch K a L. Priesečník BK a CL označíme M. Dokážte, že $|AD| = |MB| + |MC|$. Pomôžte Jankovi s touto úlohou.

8. Kuisovi kúpili pod stromček najnovšiu brutusstavebnicu. Skladá sa z nekonečne veľa kociek $2 \times 2 \times 2$ a nekonečne veľa kociek $3 \times 3 \times 3$. Petinka mu však povedala, že to nie je taká super stavebnica, lebo existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n takých, že kocku $n \times n \times n$ nevie Kuiso zo stavebnicových kociek poskladať. Má Petinka pravdu? Viete nájsť nekonečne veľa takých kociek, že ich Kuiso nebude vedieť zo svojich nových kociek poskladať?

4

Štvrtá séria
Úlohy pripravili: vedúci STROMu
Termín odoslania riešení: **16. apríl 2007**

1. Zatvorte oči … Predstavte si kocku. Má 6 stien, všetky sú štvorce. Keď z nej na vhodných miestach odrežeme malé štvorsteny, ostane nám také zvláštne teleso, ktoré bude mať 2 trojuholníkové steny a 6 päťuholníkových stien. Narysujte sieť tohto telesa *(aby sme si ho mohli my poskladať)*.
Narysujte nám aj sieť takého telesa, ktoré vznikne odrezaním niekoľkých štvorstenov z kocky a má 4 trojuholníkové a 6 päťuholníkových stien.

2. Katinka položila na niektoré políčka šachovnice kamienky tak, že na každom políčku bol najviac jeden kamienok. Potom ich začala presúvať po šachovnici. V každom ťahu posunula niektorý kamienok na niektoré voľné susedné políčko (políčka sú susedné, ak susedia stranou, nestačí, ak majú spoločný roh). Po niekoľkých ťahoch zistila, že každý kamienok navštívil všetky políčka práve raz a vrátil sa na pôvodné miesto. Ukážte, že v istom okamihu nebol na svojom mieste žiadny kamienok.

3. Zoberme si teraz na hranie štvorcovú sieť. Ak spojíme čiarou bod $(0,0)$ s bodom $(6,4)$, tá pretne osem jednotkových štvorcov (pretnúť štvorec znamená rozdeliť ho na dve časti). Ak spojíme úsečkou bod $(0,0)$ s bodom (p,q), kde p a q sú prirodzené čísla, koľko štvorcov pretneme?

4. Gabka si nakreslila rovnostranný trojuholník PUF. Opísala mu kružnicu, ktorú body U a F rozdelili na dva oblúky. Potom Gabka dokreslila bod M na oblúku UF neobsahujúcom P. Ukážte, že v Gabkinom trojuholníku platí $|MP| = |MU| + |MF|$.

5. Maťko a Kubko hrajú na šachovnici hru s ovečkami a vlkmi. Maťko má jednu figúrku – ovečku, Kubko má tri figúrky – vlkov. Všetky figúrky majú štyri možné ťahy na susedné políčka (stranou). Ovečka môže vyjsť mimo šachovnice, pokiaľ je na kraji, čím vyhráva. Ak sa ocitne ovečka s vlkom na jednom políčku, vyhrávajú vlci. Maťko začína. V každom kole má Maťko jeden ťah ovečkou, Kubko ťahá všetkými vlkmi. Výnimkou je len prvé kolo, keď má Maťko dva ťahy. Ovečka je na vnútornom políčku šachovnice. Je možné na začiatku, ak poznáme počiatočnú polohu ovečky, položiť troch vlkov na krajné políčka šachovnice tak, aby chytili ovečku?

6. Čolinka obľubuje jednotky. Keď tak dumala večer pre spaním v postieľke, zišla jej na um otázka, aký je najväčší spoločný deliteľ čísla 111111111111 (12 cifier) a čísla $111\ldots111$ (100 cifier). S touto úlohou sa ľahko popasovala. Na čo prišla? Keďže sa jej to zapáčilo a ani rátanie ovečiek ju neuspalo, začala sa trápiť nad všetkými číslami z jednotiek. Chcela zistiť, aký je najväčší spoločný deliteľ čísel $111\ldots111$ (m cifier) a $111\ldots111$ (n cifier). Nad tým sa trápi až dodnes a nedá jej to spávať. Skúste jej pomôcť, zistite najväčší spoločný deliteľ týchto dvoch čísel. Nezabudnite na zdôvodnenie.

7. My všetci v STROMe máme radi množiny. Aj preto sme sa minule potešili, keď nám jeden riešiteľ poslal v obálke 2007 množín. Čuduj sa svete, neboli to obyčajné množiny, ale mali dve výnimočné vlastnosti. Každá z nich mala 40 prvkov a prienik každých dvoch množín mal práve jeden prvok. Feri vyhlásil, že to sú také skvelé množiny, že dokonca existuje prvok, ktorý patrí do všetkých 2007 množín. Má Feri pravdu? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

8. Veľký geometer Tomáš sa cez sviatky nenudil. Na zahnanie nudy mu stačila jedna úsečka AB a bod P mimo nej. Začal si kresliť kolmé priemety úsečky AB na všetky priamky prechádzajúce bodom P. Aký útvar vytvorili všetky kolmé priemety?

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Copycentrum PERGAMON
- Nadačný fond Východoslovenskej energetiky a.s. Nadácie Pontis
- Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika, Košice
- Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice

Názov: STROM — korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • Január 2007 • Letný semester 31. ročníka (2006/2007)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`