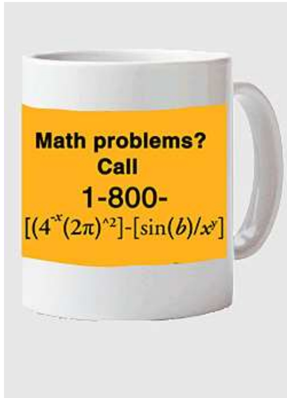
STROM

Korešpondenčný matematický seminár



Ahoj, riešitelia naši!

A máme po Veľkej noci. Chlapci si kde-tu čosi vyšibali a vypolievali a dievčatá nám aspoň najbližší rok budú pekné a zdravé. Teda každý bude v pohode a bude sa tešiť na skvelé jesenné sústredenie. Prezradíme zatiaľ, že bude veľmi skoro, skôr ako čakáte.
No ešte skôr, ako sa pôjdeme sústrediť, máme tu Matboj. Náš úžasný Matboj, ktorý tentokrát zase zabezpečí dvanástim z vás sústredenie, aj keď neriešili STROMček. Že ste už prihlasení? Tak sa na vás tešíme, uvidíme sa 27. apríla.

A kto ste neboli na výlete v Slovenskom raji, môžete ľutovať. Bolo tam fakt krásne.

Vaši **STROM**isti.

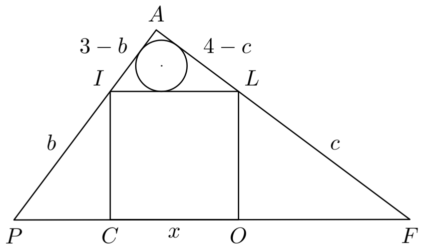
A mathematician and ...

The physicist and the engineer are in a hot-air balloon. Soon, they find themselves lost in a canyon somewhere. They yell out for help: „Helllloooooo! Where are we?“
15 minutes later, they hear an echoing voice: „Helllloooooo! You're in a hot-air balloon!!“
The physicist says, „That must have been a mathematician.“
The engineer asks, „Why do you say that?“
The physicist replied: „The answer was absolutely correct, and it was utterly useless.“

Several scientists were asked to prove that all odd integers higher than 2 are prime.
Mathematician: 3 is a prime, 5 is a prime, 7 is a prime, and by induction - every odd integer higher than 2 is a prime.
Physicist: 3 is a prime, 5 is a prime, 7 is a prime, 9 is an experimental error, 11 is a prime. Just to be sure, try several randomly chosen numbers: 17 is a prime, 23 is a prime...
Engineer: 3 is a prime, 5 is a prime, 7 is a prime, 9 is an approximation to a prime, 11 is a prime,...
Programmer (reading the output on the screen): 3 is a prime, 3 is a prime, 3 a is prime, 3 is a prime....
Biologist: 3 is a prime, 5 is a prime, 7 is a prime, 9 – results have not arrived yet,...
Psychologist: 3 is a prime, 5 is a prime, 7 is a prime, 9 is a prime but tries to suppress it,...
Chemist (or Dan Quayle): What's a prime?
Politician: "Some numbers are prime.. but the goal is to create a kinder, gentler society where all numbers are prime... "
Programmer: „Wait a minute, I think I have an algorithm from Knuth on finding prime numbers... just a little bit longer, I've found the last bug... no, that's not it... ya know, I think there may be a compiler bug here - oh, did you want IEEE-998.0334 rounding or not? - was that in the spec? - hold on, I've almost got it - I was up all night working on this program, ya know... now if management would just get me that new workstation that just came out, I'd be done by now... etc., etc. ...“
(Two is the oddest prime of all, because it's the only one that's even!)

Komentáre k úlohám 3. série 31. ročníka

1. Opravovali: Robko Hajduk a Michal Dančo Počet riešiteľov: 25



Štvorec vpísaný do trojuholníka nám rozdelil veľký trojuholník na štvorec a 3 podobné trojuholníky (skúste si sami overiť, či sú podobné s pôvodným trojuholníkom). Vďaka podobnosti trojuholníkov vieme určiť rozmery strán nášho menšieho trojuholníka, do ktorého bude vpísaná kružnica. Označme vrcholy štvorca C, O, L a I, dĺžku úsečky PI písmenom b, dĺžku úsečky FL písmenom c a stranu štvorca x (ako na obrázku). Môžeme si zostaviť napríklad nasledujúce rovnice:

- z podobnosti trojuholníka PAF a $PCI \rightarrow b/x = 4/5$,
- z podobnosti trojuholníka PAF a $OAL \rightarrow x/c = 3/5$,
- z podobnosti trojuholníka CLI a $OAL \rightarrow (3-b)/x = x/c$.

Nájdenie b, c a x už nechávame na Vás. Prezradíme pre kontrolu, že x vyšiel trochu škaredý zlomok 60/37. K vyriešeniu úlohy potrebujeme vedieť dĺžky všetkých strán trojuholníka CLI. Trojuholník, do ktorého vpisujeme kružnicu, je jednoznačne určený dĺžkami strán, preto aj polomer tej vpísanej kružnice je nimi jednoznačne určený. Ostáva nejako ho z tých dĺžok strán vypočítať. Keďže asi nie sme prví, ktorí sa v takejto situácii nachádzajú, stojí za pokus pohľadať niečo v tabuľkách. Nájdeme vzorec

$$r = \frac{S}{\frac{a+b+c}{2}},$$

kde a, b, c sú strany trojuholníka, r je polomer vpísanej kružnice a S je obsah trojuholníka. Ako sa dostali autori k tomuto vzorcu? Spojili všetky vrcholy trojuholníka so stredom vpísanej kružnice a dostali tri trojuholníky. Cez obsahy malých trojuholníkov a veľkého sa dopracovali k k uvedenému vzorčeku (skúste porozmýšľať, ako túto myšlienku dorazili do úspešneho konca). Na výpočet potrebujeme vo vzorci poznať aj obsah trojuholníka, ktorému je kružnica vpísaná. Verím, že to už hravo zvládnete. Veď pre pravouhlé trojuholníky, v ktorých poznáme dĺžky odvesien. Existuje ešte jeden vzorec pre výpočet polomeru vpísanej kružnice, ktorý môžeme použiť len pre pravouhlé trojuholníky: $r = \frac{a+b-c}{2}$ (kde c je prepona). Môžete skúsit vypočítať polomer aj pomocou tohoto vzorčeka, malo by vám vyjsť to isté číslo.

No a aby ste sa nenudili, jedna úloha na voľné chvíľky: V ktorom trojuholníku (z trojuholníkov, ktoré vznikli vpísaním štvorca do trojuholníka PAF) má vpísaná kružnica najväčší polomer?

Komentár: S úlohou ste sa mnohí úspešne pohrali, no body sa často strácali za nepresnosti. Uznávame, že vyšli škaredé čísla, no aj s nimi sa treba občas potrápiť.

2. Opravoval: Dávid Hudák Počet riešiteľov: 22

Najoriginálnejší riešitelia: Alex Kuncová, Eduard Eiben, Adriana Szilágyiová

Na súťaži bolo 100 účastníkov, každý bol inak zdatný a každý odohral 99 zápasov. Usporiadajme ich podľa zdatnosti. Máme jedného superšampióna, ktorý porazí všetkých. Má na konte 99 výhier. Druhý najlepší hráč zvíťazí v každom zápase okrem zápasu s prvým najlepším. Teda má na konte 98 výhier. Podobne tretí najlepší má 97 výhier. Takto by vyzerala prvá trojka bez použitia zázračných mašiniek. V celej úlohe si budeme všímať šestku najlepších hráčov, označme týchto hráčov postupne

$$p_1(99), p_2(98), p_3(97), p_4(96), p_5(95), p_6(94).$$

A teraz poďme podvádzať. Použitie dvoch mašiniek v jednom zápase je zbytočné, pretože zvíťazí lepší (ako aj bez mašinky). Ďalej použiť mašinku proti slabšiemu by bolo pre zdatnejšieho hráča iba mrhanie. Teda mašinky budú používať iba slabší v zápase so zdatnejšími. Je jasné, že každý môže podvádzať najviac raz a tým si môže polepšiť svoje skóre o maximálne 1 výhru.

Potrebujeme nájsť trojicu hráčov, ktorá by predbehla v rebríčku našich pôvodných víťazov (p_1, p_2, p_3), a to na čo najmenej podvodov. To znamená, že potrebujeme odobrať pôvodným víťazom dostatok výhier, aby ich predbehli iní traja. Teda stačí, aby najhorší z nových víťazov bol lepší ako všetci

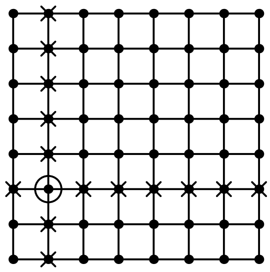
pôvodní.
Zdá sa, že by noví víťazi mali byť p_4, p_5, p_6. Ak najhorší z nich (p_6) použije mašinku proti niektorému z p_1, p_2, p_3, tak si polepší skóre na 95 výhier. Pôvodným víťazom sa tak musia znížiť počty výhier na 94. To sa dá iba vtedy, keď proti hráčovi p_1 použije mašinku nejakých 5 hráčov ($99 - 94 = 5$). Proti hráčovi p_2 musia použiť mašinku 4 ďalší hráči ($98 - 94 = 4$). A nakoniec proti hráčovi p_3 musia použiť mašinku 3 ďalší hráči ($97 - 94 = 3$). Spolu to je $5 + 4 + 3 = 12$ podvádzajúcich hráčov. Pričom jeden z podvodov je podvod hráča p_6 proti niektorému z p_1, p_2, p_3. Nový rebríček bude:

$$p_4(96), p_5(95), p_6(95), p_1(94), p_2(94), p_3(94).$$

Teda našli sme riešenie, ak hľadaná trojica je trojica p_4, p_5, p_6. Ak by to bola iná trojica, tak by pôvodní víťazi museli znížiť svoje výhry na menej ako 94. A to by si vyžiadalo viac podvodov proti nim.
Odpoveď: Podvádzalo najmenej 12 hráčov.
Táto úloha sa vám vcelku páčila, len dúfam, že vás na nej priťahovalo nie to podvádzanie. Až na malé omyly z nepozornosti ste našli riešenie, keď ste troch najlepších odsunuli zo stupňa víťazov a nahradili ste ich 4., 5. a 6. hráčom z pôvodného poradia. Ok, bolo to správne riešenie. No väčšina riešiteľov neurobila diskusiu o tom, čo ak by to bola iná trojica. Tak nabudúce si treba položiť otázku: „Nešlo by inou trojicou dosiahuť rovnaký efekt na menej podvodov? Ak nie, tak prečo?“ To bol dôvod na odpočítavanie bodov. Inak spokojnosť. Sudoku zdar (bez podvodov)!

3. Opravovali: Tomáš Lučivjanský a Robo Andrássy **Počet riešiteľov: 26**

Táto úloha sa tešila veľkej popularite, o čom svedčí aj pomerne veľký počet riešení. Takmer všetci ste prišli na to, že Robko by mohol nájsť oveľa viac ako 2007 pravouhlých trojuholníkov, ak si tých 64 bodov správne usporiada. Drvivá väčšina z vás začala úlohu riešiť usporiadaním bodov do pravidelnej pravouhlej mriežky. Ďalší postup sa už líšil od riešenia k riešeniu. Zväčša ste počítali počty vybraných „typov“ trojuholníkov (podľa dĺžky odvesien), no našlo sa aj zopár veľmi stručných a presných riešení podobných nasledujúcemu.



Usporiadajme si našich 64 bodov do štvorcovej mriežky 8×8. Vezmime ľubovoľný bod v i-tom riadku a j-tom stĺpci (na obrázku zakrúžkovaný). Pri ňom bude pravý uhol, čo nám zabezpečí, aby sa ďalej vytvárané trojuholníky neopakovali. Za druhý vrchol môžeme vziať ľubovoľný bod z i-teho riadku (je ich už len 7). Ako tretí vrchol nám zas môže poslúžiť hociktorý bod z j-teho stĺpca (aj tých je 7). Teda k nášmu bodu (i, j) sme našli $7 \cdot 7 = 49$ pravouhlých trojuholníkov. Začali sme s ľubovoľným bodom mriežky, a preto táto úvaha platí pre každý zo 64 bodov. Dostali sme $64 \cdot 49 = 3136$ pravouhlých trojuholníkov. A to sme počítali len trojuholníky, ktorých odvesny sú rovnobežné s hranami mriežky! V skutočnosti ich tam je ešte oveľa viac rôzne pootáčaných. Teda Robko mohol nájsť viac ako 2007 pravouhlých trojuholníkov.

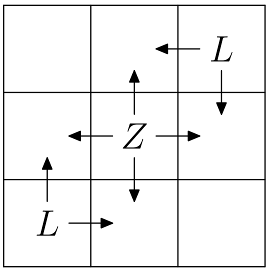
4. Opravovala: Feri Kardoš a Lukáš Mižišin **Počet riešiteľov: 24**

O riešenie tejto úlohy sa pokúsila väčšina riešiteľov. No cestou k výsledku drvivá väčšina stratila správny smer a zaujala zlý postoj.
Čímsi začať treba. Začať náčrtkami je fajn, môžeme si oťukať problém. Na druhej strane náčrtky ani predstavy v hlave na dôkaz nestačia, najmä nie taký, ktorý má pochopiť aj niekto iný, kto si riešenie prečíta. Navyše ak chceme dokázať, že čosi neexistuje, vyžaduje si to inú úvahu než „hľa, skúšam to kresliť, ale nedarí sa mi to“.
Preto je najlepšie si pár údajov o danom telese zistiť skôr, ako ho budeme načrtávať. Počet stien vieme. Počet hrán určíme z počtu strán roviných útvarov a to tak, že spočítame počet strán roviných útvarov. V prípade Dory výšiel počet strán všetkých stien dokopy 28 a v prípade Maruše vyšiel 33. Tu mnohí na základe počtu strán vylúčili Marušu. Z toho dôvodu, že hranu vytvárajú dve strany stien, a u telesa, ktoré dostala Maruša, je počet strán stien nepárny. Za teleso, ktoré sa dá zostrojiť, označili Dorine. U telesa, ktorého počet strán stien je nepárny, ešte nemôžeme vylučiť jeho existenciu. Ale ak existuje, je nekonvexné, lebo dve hrana budú ležať na priamke a dokopy budú tvorené iba tromi stranami stien.

A chcem upozorniť aj na to, že ak je počet strán stien párny, tak to nutne nemusí znamenať, že teleso existuje. Uvediem príklad. Skúste vytvoriť teleso, ktorého steny tvorí 5 štvoruholníkov. V prípade, že ste len na základe počtu strán stien určili, ktoré teleso existuje a ktoré nie, dostali ste dva body. Tí z vás, ktorí ešte k tomu načrtli Dorino teleso, dostali tri body.
Takže počet hrán telesa, ktoré dostala Dora, je $\frac{28}{2} = 14$ (ak toto teleso existuje) a počet hrán telesa, ktoré dostala Maruša, je $\frac{(33-3)}{2} + 1 = 16$ (opäť len vtedy, ak existuje). Ak ich chcete zostrojiť, začnite päťuholníkmi a ich umiestnením voči sebe. Potom pokračujte postupným pridávaním trojuholníkov. Pri Marušinom telese si prv, než budete umiestňovať trojuholníky, zvoľte stranu, ktorá bude tvorená tromi stenami.
Táto úloha síce vyzerala ľahko, no nebola až tak jednoduchá na dokazovanie. Preto si v budúcnosti dávajte väčší pozor pri dokazovaní existencie alebo neexistencie.

5. Opravoval: Tomáš Lučivjanský a Karol Lacuška — Počet riešiteľov: 21

Väčšina z vás tento príklad zvládla. Niektorí naozaj veľmi dobre, niektorí niečo pozabúdali, niektorí sa zasekli pri vyslovení myšlienky a žiaľ niektorí buď zle prečítali zadanie, alebo nepochopili, o čo v príklade ide. Ale sme si istí, že ak tá menšina popracuje na svojich chybách, nabudúce to bude lepšie.



A teraz k riešeniu. Zajac už je položený na šachovnicu. Otázka znela, či vieme dve líšky postaviť na kraj šachovnice tak, aby líšky chytili zajaca. Odpoveď znie: Áno, vieme. A ako? Líšky postavíme tak, aby vytvorili uhlopriečku štvorca, na ktorej sa nachádza zajac. (Taký štvorec existuje bez ohľadu na polohu zajaca, premyslite si to.)
Ostáva dokázať, že v niekoľkých ďalších ťahoch líšky zajaca chytia. Na obrázku máme pozíciu, v ktorej je na ťahu zajac. Nech sa pohne hocikam, jedna z líšok ho hneď chytí. Všimnime si, že táto pozícia je v podstate taká istá ako tá na začiatku: zajac je na uhlopriečke štvorca, ktorého strany sú rovnobežné so stranami šachovnice a koncové body tejto uhlopriečky sú líšky. Takúto pozíciu budeme udržovať od začiatku do konca. V každom ťahu sa líšky pohnú tak, aby sa uhlopriečka, na ktorej strážia zajaca, zmenšila o jedno políčko. Nakreslite si obrázok, je z neho jasné, že ako sa líšky majú hýbať.
Ak sa vám úloha páčila, skúste ju pre šachovnice iného tvaru. Čo tak obdĺžnik? A koľko líšok budeme potrebovať na chytenie zajaca, ak dovolíme, aby sa pohyboval aj šikmo o jedno políčko? (Líšky pritom buď chodia ako pôvodne, alebo tiež môžu chodiť aj šikmo.)

6. Opravovali: Robko Hajduk a Števo Pero — Počet riešiteľov: 19
Najoriginálnejší riešitelia: Tomáš Kocák

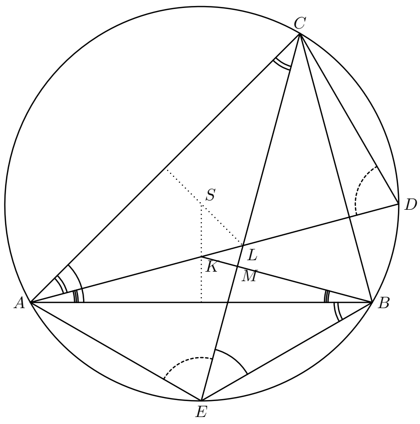
Táto úloha nebola podľa vašich riešení náročná. Tí z vás, ktorí na nej pohoreli, si buď povrchne prečítali zadanie úlohy, alebo sa pustili úplne zlým smerom, ktorý neviedol k správnemu riešeniu (a nestihli sa zo zlej cesty pred odoslaním série vrátiť). Najmä pre nich je určený tento krátky náčrt riešenia.
Po prečítaní zadania by sme si mali všimnúť, že čísla t, a, j musia byť kladné. Ak má byť súčin niektorého z nich so zodpovedajúcou zátvorkou kladný (lebo je väčší ako 1/4), tak musí byť aj zátvorka kladná, teda čísla t, a, j musia byť menšie ako jedna.
Niektorí z vás sa vybrali touto cestou a rozdelili si skúmaný interval na tri časti $(0, \frac{1}{2})$, $\frac{1}{2}$, $(\frac{1}{2}, 1)$. Potom rozobrali niekoľko možností pre príslušnosť čísel t, a, j do týchto častí a ukázali, že aspoň jedna z nerovností neplatí.
Našli sa aj takí, ktorí prišli na krajšiu myšlienku. Nerovnosti sú symetrické, teda bez ujmy na všeobecnosti môžeme t, a, j medzi sebou ľubovoľne povymieňať.
Najprv sa zaoberajme prípadom, keď sú dve čísla rovnaké, napríklad $a = t$. Z nerovnosti $t(1-a) > \frac{1}{4}$ dostávame $t(1-t) > \frac{1}{4}$, po úprave $(2t-1)^2 < 0$. Štvorec nikdy nie je menší ako nula, máme spor.
Keď sú všetky čísla navzájom rôzne, môžeme zvoliť za a to najväčšie z nich (kvôli symetrii). Potom $a = t+x$, kde x je kladné číslo. Po dosadení do nerovnosti $t(1-a) > 1/4$ dostávame $t(1-(t+x)) > 1/4$ a po následnej úprave $(2t-1)^2 + 4tx < 0$. Ako v prvom prípade, štvorec čísla je vždy nezáporný a súčin $4tx$ je kladný, keďže každý zo súčiniteľov je kladný. Teda celý výraz je vždy kladný a nie záporný a to je spor.
Jedno pekné riešenie na záver. Vynásobme všetky nerovnosti (ľavé strany dokopy a pravé strany dokopy) a preusporiadajme to tak, aby sa rovnaké písmenká dostali k sebe. Ak platili všetky nerovnosti,

tak platí aj

$$L = t(1-t) \cdot a(1-a) \cdot j(1-j) > 1/64.$$

Ale my vieme (z AG nerovnosti alebo úpravou na štvorec), že $t(1-t) \leq 1/4$. To isté platí aj pre a a j. Takže $L \leq 1/64$, čo je spor.
Záver: Ukázali sme (tromi spôsobmi), že pre Dávidove čísla neplatí aspoň jedna znerovností.

7. Opravoval: Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 3**
Najoriginálnejší riešitelia: Tomáš Kocák, Adriána Szilágyiová
Prišli len tri riešenia tejto úlohy, čo je na takú peknú úlohu škoda. Z nich dve boli veľmi pekné, a teda ocenené hlasom. Prejdime si jedno riešenie (inšpirované riešením Tomáša Kocáka).



Označme všetky body podľa obrázka. Tak, ako to často pri geometrických úlohách býva, keď chceme nájsť elegantné riešenie, častokrát treba do obrázku niečo dokresliť. Tentoraz skúsme predĺžiť úsečku CM. Priamka CM pretne kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode E. Na to, aby sme dokázali rovnosť

$$|AD| = |MB| + |MC|,$$

stačí ukázať, že platia rovnosti $|AD| = |CE|$ a $|MB| = |ME|$.
Pozrime sa najprv na prvú rovnosť. Zhodnosť dvoch dĺžok sa dá dokázať napríklad tak, že ukážeme zhodnosť nejakých vhodných dvoch trojuholníkov. Tu sa priamo vnucujú trojuholníky ADC a CEA. A naozaj, sú zhodné podľa vety *usu*: uhly ADC a AEC sú zhodné, pretože oba sú obvodové uhly nad tetivou AC; stranu AC majú oba trojuholníky spoločnú; uhly ACE a DAC sú rovnakej veľkosti, pretože $|\measuredangle ACE| = |\measuredangle ACL| = |\measuredangle LAC| = |\measuredangle DAC|$ (bod L podľa zadania leží na osi strany AC).
Pozrime sa teraz na druhú rovnosť. Tu zhodnosť dvoch dĺžok skúsime ukázať tak, že ukážeme, že trojuholník EMB je rovnoramenný so základňou EB. Na to potrebujeme ukázať, že uhly MEB a MBE majú rovnakú veľkosť. A sme opäť pri uhloch. Dostávame postupne $|\measuredangle MEB| = |\measuredangle CEB| = |\measuredangle CAB| = |\measuredangle CAL| + |\measuredangle KAB| = |\measuredangle ACL| + |\measuredangle KBA| = |\measuredangle ACE| + |\measuredangle MBA| = |\measuredangle ABE| + |\measuredangle MBA| = |\measuredangle MBE|$, čo bolo treba dokázať. (Platnosť jednotlivých rovností sa dá overiť jednoducho podľa obrázka, kde uhly rovnakej veľkosti sú označené rovnakou značkou).
Pozrime sa na to z nadhľadu. Čo nám pomohlo úlohu vyriešiť? Na priamke CM sme ku úsečke CM s dĺžkou $|CM|$ pridali úsečku ME s dĺžkou $|MB|$ a takto namiesto toho, aby sme čosi dokazovali o súčte $|MB| + |MC|$, stačilo pracovať s dĺžkou $|CE|$. Toto je kľúčová idea, zvyšok je už len počítanie uhlov s využitím vlastností bodov spomínaných v zadaní a kružnice, ktorá je kvôli obvodovým uhlom na počítanie veľkostí uhlov zvlášť vhodná. Uhly treba počítať cieľavedomo – počítame len tie, ktoré na niečo potrebujeme, a nie hala-bala všetky a čo vypočítať nevieme, označíme novým písmenkom. Môžete si to precvičiť na tejto úlohe.
Je daný trojuholník ABC, pričom $\alpha \neq 90°$. Nech D je ľubovoľný bod na oblúku BC kružnice k opísanej trojuholníku ABC neobsahujúcom bod A. Osi úsečiek AB a AC pretínajú priamku AD v bodoch K a L. Priesečník BK a CL označme M. Dokážte, že body B, C, M a S (stred kružnice k) ležia na jednej kružnici.
V prípade, že vás počítanie uhlov baví, skúste ešte toto:
Daný je trojuholník ABC so stredom vpísanej kružnice I. Dokážte, že os strany AB, os uhla ACB a kružnica opísaná trojuholníku ABC sa pretínajú v jednom bode. Označme tento bod M. Dokážte, že bod M je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABI.
Keď ste to zvládli, pozrite si úlohu 5 z celoštátneho kola. Po tomto cvičení by sa mala vyriešiť takmer sama. :)

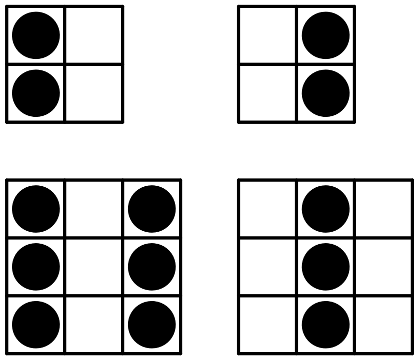
8. Opravovali: Feri Kardoš a Jano Kováč **Počet riešiteľov: 4**
Úloha vyzerá na prvý pohľad lákavo, ale po zamyslení človeka zaskočí, o čom svedčí aj počet jej riešiteľov. A nanešťastie aj počet úspešných riešiteľov – nepodarilo sa ju totiž vyriešiť nikomu, aj

keď väčšina odpovedala na otázku zo zadania správne, za čo si vyslúžili jeden bod. Celý trik tejto úlohy je však v podstate jednoduchá myšlienka nazývaná *invariant*. Toto slovo pochádza z latinčiny, v matematike to označuje istý matematický objekt (napr. nejaký výraz), ktorého hodnota sa pri určitej transformácii nemení. Ukážeme si to na príklade. Na tabuli máme napísané tri čísla 2, 3, 4. V jednom kroku môžeme jedno z nich zväčšiť o 2 alebo dve z nich zmenšiť o 1. Môžeme po niekoľkých krokoch dosiahnuť, aby súčet čísel na tabuli bol 0? Súčet čísel na tabuli označme S. V jednom kroku sa S môže buď zväčšiť o 2, alebo zmenšiť o 2. Všimnime si, že ani jednou z týchto zmien nedosiahneme zmenu zvyšku čísla S po delení dvomi. Na začiatku je číslo S nepárne, a po každom kroku bude tiež nepárne. Takže S nemôže byť 0. Zopakujme si: čo bolo v tomto prípade invariantom? Zvyšok súčtu S po delení dvomi, inak povedané parita súčtu S. Invarianty sú v kombinatorike (a nielen tam) bežným prostriedkom na dôkaz toho, že čosi nie je možné.

Pozrime sa teda, ako to celé malo vyzerať.

Aj keď úloha je o skladaní kociek, dá sa zjednodušiť: môžeme sa namiesto skladania kociek pokúsiť o skladanie štvorcov. Keď totiž nedokážeme zo štvorčekov 2×2 a 3×3 poskladať štvorec $n \times n$, tak nedokážeme poskladať stenu kocky $n \times n \times n$, a teda nedokážeme poskladať ani celú kocku.

Zafarbime stĺpce štvorca $n \times n$ striedavo na bielo a na čierno. Predstavme si, že tento štvorec $n \times n$ je zložený zo štvorcov 2×2 a 3×3.



Všimnime si (na obrázku) rozdiel počtu čiernych a bielych štvorčekov v jednotlivých štvorcoch 2×2 a 3×3. Pri štvorci 2×2 je rozdiel vždy nula bez ohľadu na to, kde je takýto štvorec umiestnený. Pri štvorci 3×3 je rozdiel vždy 3 (alebo -3, ale na znamienku tu nezáleží, lebo odčítať môžeme v opačnom poradí a potom to bude 3). To znamená, že ak máme poskladať štvorec $n \times n$ zo štvorcov 2×2 a 3×3, tak rozdiel počtu čiernych štvorčekov a bielych štvorčekov musí byť násobkom čísla 3. Toto je to, čo majú všetky možné delenia štvorca $n \times n$ na štvorce 2×2 a 3×3 spoločné – hľadaný invariant.

Ak n je párne, vieme štvorec $n \times n$ bez problémov poskladať zo štvorcov 2×2. Ak n je nepárne, bude spomínaný rozdiel počtov čiernych a bielych štvorčekov práve n (posledný stĺpec). To však znamená, že n musí byť deliteľné tromi. A preto nedokážeme z daných štvorcov poskladať štvorce $n \times n$ pre $n = 6k \pm 1$.

Keď nie štvorce, tak ani kocky. Takže Petinka mala pravdu, existuje nekonečne veľa takých kociek, ktoré Kuiso nevie poskladať, napríklad kocky s hranou dĺžky $6k + 1$ pre každé k. Lebo Kuiso vie poskladať iba také kocky, ktorých hrana je násobkom 2 alebo 3.

Precvičte si ofarbovanie na podobnej úlohe. Nájdite množinu všetkých takých štvorcov, ktoré sa dajú vyplniť obdĺžnikmi 4×1 a 1×4.

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Copycentrum PERGAMON
- Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika, Košice
- Nadácia Pontis
- Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice

Názov: STROM — korešpondenčný matematický seminár
Číslo 4 • Apríl 2007 • Letný semester 31. ročníka (2006/2007)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`

Napísali STROMisti. Štýl tomu dal TEX.