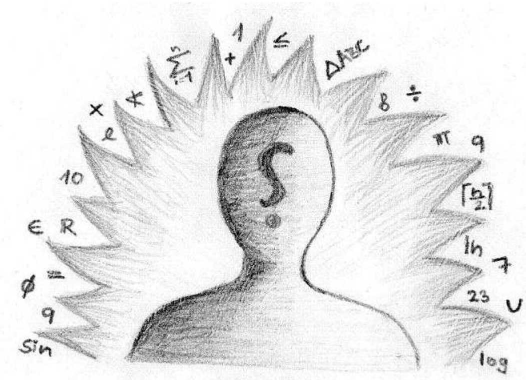
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj STROM*–áci!*



Bumerang nami vyhodený sa vrátil späť. No nevrátil sa nezmenený, je plný nových zážitkov zo sústredenia a zvlhnutý od sĺz lúčiacich sa maturantov. Tí sú už z hry von, museli prenechať miesto mladším, krajším, schopnejším. Áno, neostáva nám nič iné ako dúfať, že vám! :-)
Tak sa chytro pustite do príkladov, tak ako sa gurmán púšťa do kaviáru, somelier do ochutnávky vína najlepšej odrody, či Slovák do piva :-). Veď aj matematika je vášňou mnohých, medzi inými aj niektorých spisovateľov. Nech svojím výrokom k nám prehovorí sám pán Stendhal: „Vždy som mal rád a stále mám rád matematiku samotnú, pretože nenecháva priestor pre pokrytectvo ani nejasnosť.“
Veľa kreatívneho myslenia! Vaši **STROM**isti

Riešenia 1. série úloh letného semestra 34. ročníka

1. Gaba a Katka našli kopu čokolád. Celková váha všetkých čokolád je S kg a najťažšia z nich má M kg. Dievčatá pri delení čokolády postupujú takto: rozdelia všetky čokolády do dvoch kôpok a potom lósom rozhodnú, ktorá kôpka ktorej z nich pripadne.
a) Dokážte, že menšia kôpka má pri hocijakom rozdelení hmotnosť nanajvýš $S - M$.
b) Ukážte, že dievčatá vedia čokolády rozdeliť na dve kôpky tak, že hmotnosť menšej kôpky bude aspoň $(S - M)/2$.

Opravoval: Jakub Sedlák **Počet riešiteľov: 42**
<u>**Riešenie:**</u>
Označíme hmotnosti kôpok A a B. Keďže hovoríme o hmotnostiach, platí $A \in \mathbb{R}_0^+$ a aj $B \in \mathbb{R}_0^+$. Navyše platí, že $A + B = S$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $A \leq B$.

a) Chceme dokázať, že pre hocijaké rozdelenie platí $A \leq S - M$. Pre najťažšiu čokoládu môže nastať jedna z nasledujúcich možností:

1. Najťažšia čokoláda je v kôpke s hmotnosťou B. Potom ekvivalentnými úpravami nerovností dostávame:
$$B \geq M$$
$$S = A + B \geq A + M$$
$$S - M \geq A,$$
čo bolo treba dokázať.

2. Najťažšia čokoláda je v kôpke s hmotnosťou A. Potom ekvivalentnými úpravami nerovností dostávame:

$$\begin{aligned} A &\geq M \\ S = B + A &\geq B + M \\ S - M &\geq B \geq A. \\ S - M &\geq A, \end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať.

b) Máme ukázať, že existuje rozdelenie, kde platí: $A \geq \frac{S-M}{2}$.
Dokazované tvrdenie si ekvivalentnými úpravami môžeme upraviť takto:

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{S-M}{2} \\ 2A &\geq A + B - M \\ A &\geq B - M \\ A - B &\geq -M \\ B - A &\leq M, \end{aligned}$$

čo ľudsky povedané znamená, že hmotnosti kôpok sa líšia nanajvýš o M. Takéto tvrdenie sa môže zdať samozrejmým, no v správnom riešení treba určite uviesť aj jeho dôkaz. My uvedieme dokonca dva pekné dôkazy tohoto tvrdenia.

1. Dôkaz s extremálnym princípom:
Vezmime také rozdelenie na dve kôpky, že rozdiel ich hmotností je minimálny možný. (Je jasné, že ak existuje rozdelenie podľa zadania, tak to musí byť takéto. Stačí iba ukázať, že má požadovanú vlastnosť.) Ak toto rozdelenie nespĺňa $B - A \leq M$, môžeme prehodiť jednu čokoládu z ťažšej kôpky na ľahšiu. Rozdiel hmotností týchto dvoch kôpok sa touto operáciou musí zmenšiť, to je však spor s tým, že už predtým bol minimálny.

2. Geometrická interpretácia:
Reprezentujme hmotnosť čokolády úsečkou u_i, zodpovedajúcej dĺžky. Spojme úsečky $u_1, u_2, \ldots, u_n$, kde n je počet všetkých čokolád, do jednej úsečky U. Vieme nájsť geometrický stred tejto úsečky, označme ho S_U.
Ak sa nachádza na hranici čokolád, znamená to, že sme našli rozdelenie, kde sú obe kôpky rovnaké, takže platí, že ich rozdiel nie je väčší ako M.
Ak sa S_U nenachádza na hranici čokolád, leží v nejakej úsečke u_s a rozdeľuje ju na dve časti. Dĺžku jednej si označme k a dĺžku druhej l, pričom $k \leq l$. Hranicu medzi kôpkami spravme v bližšom konci u_s ku S_U. To znamená, že oproti rozdeleniu pol na pol sme z jednej kôpky odobrali hmotnosť k a pridali ju na druhú kôpku. Rozdiel medzi kôpkami je teda $2k$. Keďže však

$$k \leq \max\{\frac{|u_i|}{2}, i = 1, 2, \ldots, n\} = \frac{M}{2},$$

tak $B - A \leq M$, čo bolo treba dokázať.

2. Máme kocku $ABCDEFGH$ s hranou dĺžky 1 (zvyčajné označenie; vrcholy A a C sú koncovými vrcholmi stenovej uhlopriečky). Uvažujme cesty v tvare lomených čiar, ktorých úsekmi sú hrany našej kocky (cesta môže po jednej hrane prechádzať aj viackrát). Ktorých ciest dĺžky 2010 začínajúcich v bode A je viac: tých, čo končia v A, alebo tých, čo končia v C? Svoju odpoveď podrobne zdôvodnite.

Opravovali: Gabika Vozáriková a Veronika Kopčová **Počet riešiteľov: 31**

Riešenie:

Cesty dĺžky 2010 vieme zrátať tak, že spočítame cesty dĺžky 2009 do susedných vrcholov. Teda počet ciest z bodu A do bodu A zistíme ako súčet ciest z A do bodov B, D, E a cesty z A do C ako súčet ciest z bodov B, D, G. Označme si počet ciest z A do A dĺžky 2010 ako A_{2010}, z A do C dĺžky 2010 ako C_{2010} a podobne aj ostatné. Predpokladajme, že počet ciest dĺžky 2010 z bodu A do bodu A je viac ako z bodu A do bodu C, teda že platí nerovnosť $A_{2010} > C_{2010}$. Ako bolo už vyššie spomenuté, platí

$$A_{2010} = B_{2009} + D_{2009} + E_{2009} \qquad \text{a} \qquad C_{2010} = B_{2009} + D_{2009} + G_{2009}.$$

Teda po dosadení do nerovnosti dostávame, že tvrdenie $A_{2010} > C_{2010}$ je ekvivalentné s tým, že

$$B_{2009} + D_{2009} + E_{2009} > B_{2009} + D_{2009} + G_{2009}.$$

Z oboch strán môžeme odpočítať $B_{2009} + D_{2009}$ a teda dostávame nerovnosť

$$E_{2009} > G_{2009}.$$

Teraz si môžeme tak isto vyjadriť E_{2009}, G_{2009} a dostaneme nerovnosť

$$F_{2008} + H_{2008} + A_{2008} > F_{2008} + H_{2008} + C_{2008}.$$

Znovu môžeme odpočítať to, čo je spoločné, teda $F_{2008} + H_{2008}$. Ostane nám potom nerovnosť

$$A_{2008} > C_{2008}.$$

Takto by sme mohli pokračovať ďalej. Teraz sa to pokúsime zovšeobecniť. Podľa predchádzajúceho: $A_{2n} > C_{2n}$ je ekvivalentné s $E_{2n-1} > G_{2n-1}$ a to zas s $A_{2n-2} > C_{2n-2}$. Takto pokračujeme až po nerovnosť $E_1 > G_1$, čo hovorí, že ciest dĺžky 1 z A do E je viac ako z A do G. To však platí, pretože existuje cesta dĺžky 1 z A do E, ale z A do G nie. A teda platí aj požadovaná nerovnosť $A_{2010} > C_{2010}$, čiže ciest dĺžky 2010 začínajúcich v bode A, čo končia v bode A, je viac ako tých, čo končia v bode C. Mimochom podľa nami odvodených vzťahov by sme dokonca presne vedeli vypočítať A_{2010} a C_{2010}. Skúste si to a výsledky porovnajte.

Iné riešenie:

Kocky sme ako deti všetci používali na stavanie, tak si aj teraz niečo v kocke postavme – bránu :-). (za inšpiráciu ďakujeme jednej šikovnej riešiteľke :-))

Brána bude obdĺžnik s vrcholmi B, D, F a H. Teraz skúsme zneužiť to, že kocka je útvar symetrický. Uvažujme najprv cesty z vrcholu A, ktoré prekračujú našu bránu (prekročením rozumieme, že v ceste sa aspoň raz vyskytne nejaký vrchol brány). Ku každej takejto ceste končiacej v A definujme jej pár (alebo ak ste menej romanticky naladený anticestu). Bude to cesta začínajúca tiež v A a s rovnakými vrcholmi, ktorými prechádza, ale len do momentu, keď prvýkrát stúpi na našu bránu. Od tohoto okamihu pokračujeme vrcholmi symetrickými podľa brány. To znamená, že ak sme napríklad mali cestu $A-E-F-B-C-D-A$, tak jej anticesta bude $A-E-F-B-A-D-C$. Anticesta stále skončí vo vrchole C, lebo ten je symetrický podľa brány k vrcholu A.

Keďže symetrickosť je vlastnosť symetrická :-), je zrejmé, že rovnaké popárovanie dostaneme, ak by sme hľadali pár k cestám končiacim vo vrchole C. Toto spárovanie má všetky „dobré vlastnosti", t.j.

nestane sa nám, že by sme dvom rôznym cestám pridali rovnakú anticestu, ani že by nejaká cesta do C nemala svojho „partnera“. Z toho teda vyplýva, že ciest z vrchola A, ktoré prechádzajú bránou a končia vo vrchole A je rovnako veľa ako tých, čo končia v C.

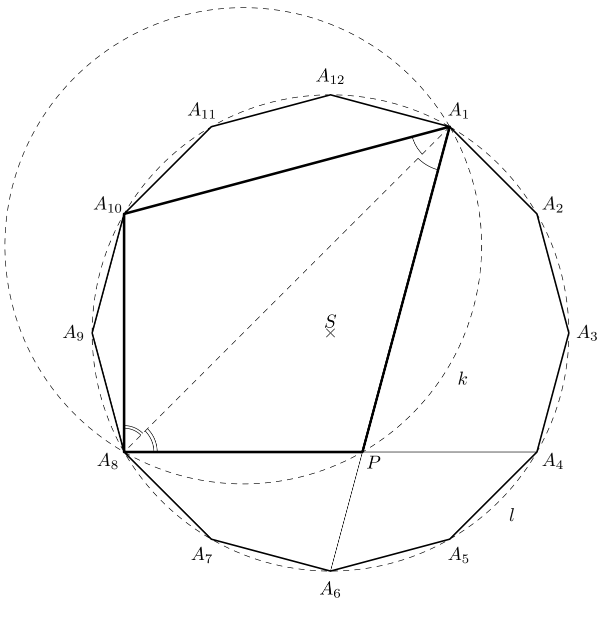
No čo ak cesta nikdy neprejde cez bránu? Je jednoduché sa o tom presvedčiť, že ak sa chceme dostať z vrchola A do vrchola C, bráne sa nevyhneme. No ak sa chcem dostať do A, existuje jediná možnosť ako sa brány ani nedotknúť a to iba s využívaním vrcholov A, E.
Máme k dispozícii 2010 krokov, čo je super, lebo je to párne číslo, teda existuje cesta $A - E - A - E - A - E - \cdots - E - A - E - A$. Z tohto vyplýva, že ciest končiacich v A je o jednu viac ako ciest končiacich v C. Stavať bránu sa nám predsa len vyplatilo :-).

Komentár: Väčšina z vás si s touto úlohou poradila hravo, z ciest kratšej dĺžky ste vypozorovali, ako by to asi mohlo fungovať, ako sa prenáša výhoda vrchola A pre cesty s postupne väčšími dĺžkami. Potom zvyčajne nasledovalo zovšeobecnenie obľúbenou matematickou indukciou. Tým, ktorí nepodali zovšeobecnenie presvedčivo, sme museli nejaké tie bodíky strhnúť dole. Celkovo vás však chválime, dobrá práca!

3. Ciferník hodín pozostáva z pravidelného dvanásťuholníka $A_1A_2 \dots A_{12}$ vpísaného do kružnice s polomerom 1. Označme P priesečník priamok A_1A_6 a A_4A_8 a k kružnicu s tetivou A_1A_8 a polomerom 1 (rôznu od kružnice opísanej nášmu dvanásťuholníku). Dokážte, že
a) bod P leží na kružnici k;
b) úsečky PA_5 a A_1A_2 majú rovnakú dĺžku;
c) stred kružnice k leží na úsečke A_8A_{12}.

Opravovali: Janka Baranová a Marek Derňár **Počet riešiteľov: 34**
Riešenie:
Ukážeme si riešenie, ktoré využíva osovú súmernosť a obvodové a stredové uhly.
Označme si kružnicu, do ktorej je vpísaný dvanásťuholník $A_1A_2 \dots A_{12}$ ako l a jej stred ako S. Vieme, že nejakej konkrétnej tetive prislúcha jeden stredový uhol a nekonečne veľa obvodových, ktoré však majú rovnakú veľkosť, a to polovicu stredového. Rovnako dlhým tetivám na jednej kružnici (prípade aj viacerých, ak sú zhodné, teda majú rovnaký polomer) prislúchajú rovnako veľké stredové, a teda aj obvodové uhly. Pusťme sa teraz už do riešenia.

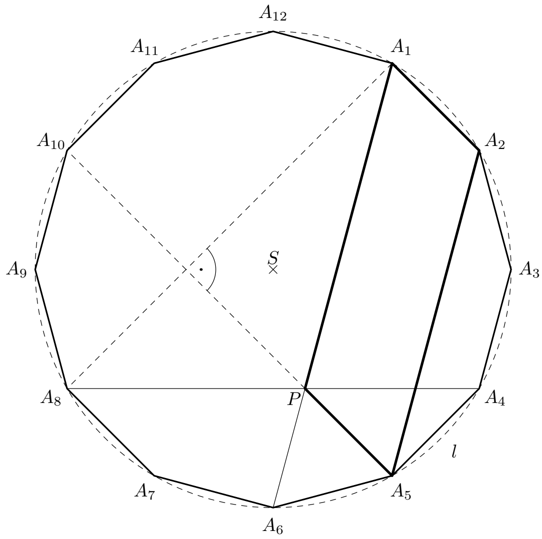
Najprv je potrebné uvedomiť si, že každý stredový uhol A_iSA_{i+1} je $\frac{360°}{12} = 30°$, teda každý obvodový uhol A_iXA_{i+1} (pričom X je ľubovoľný bod ležiaci na väčšom oblúku A_iA_{i+1} kružnice l) je $\frac{30°}{2} = 15°$.



a) Vieme, že kružnice sú podľa tetivy A_1A_8 osovo súmerné. Vyplýva to z toho, že tetiva A_1A_8 je tetivou oboch kružníc k aj l, ktoré sú zhodné (majú rovnaké polomery a to 1), ale nie totožné. Ukážeme, že bod A_{10} sa v osovej súmernosti podľa tejto tetivy zobrazí do bodu P.
Veľkosť uhla $A_1A_8A_4$ (čo je vlastne aj uhol A_1A_8P, keďže bod P leží na A_8A_4) je rovnaká ako veľkosť uhla $A_1A_8A_{10}$, keďže sú to obvodové uhly prislúchajúce rovnako veľkej tetive. Preto sa priamka A_8A_{10} v osovej súmernosti podľa tetivy A_1A_8 zobrazí na priamku A_8A_4 (respektíve A_8P).
Ďalej veľkosť uhla $A_6A_1A_8$ (čo je vlastne aj uhol PA_1A_8, keďže bod P leží na A_1A_6) je rovnaká ako veľkosť uhla $A_8A_1A_{10}$ (keďže sú to obvodové uhly prislúchajúce rovnako veľkej tetive). Preto sa

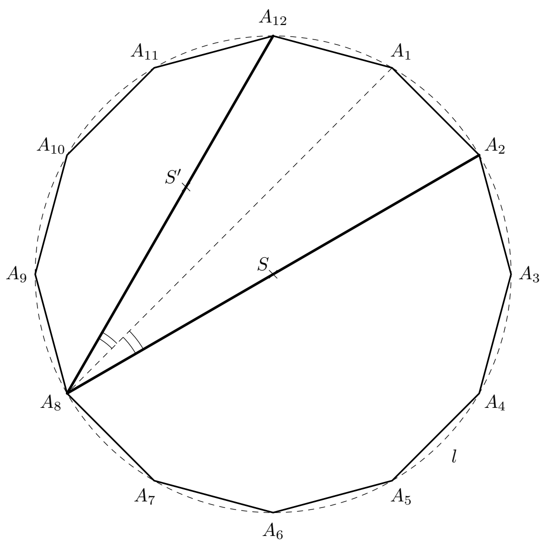
priamka A_1A_{10} v osovej súmernosti podľa tetivy A_1A_8 zobrazí na priamku A_1A_6 (respektíve A_1P). Ukázali sme teda, že bod A_{10} sa zobrazí do bodu P. Keďže bod A_{10} leží na l, tak bod P leží na kružnici s ňou osovo súmernej podľa tetivy A_1A_8, čiže na našej kružnici k, čo sme chceli dokázať.

b) Túto časť ste riešili mnohými spôsobmi, ale pri väčšine riešení bolo potrebné ukázať, že bod P patrí úsečke A_5A_{10}. Mnohí ste však toto tvrdenie ani nedokazovali, čím ste samozrejme prišli o body. Poďme si teda dokázať, že naozaj platí.
Otočením úsečky A_5A_{10} o tri „dieliky" (teda o 90°) okolo bodu S dostaneme úsečku A_1A_8, teda úsečky A_5A_{10} a A_1A_8 sú na seba kolmé. Keďže aj $A_{10}P$ je kolmé na A_1A_8 (podľa dôkazu časti a), tak P leží na A_5A_{10}.
Teraz si stačí uvedomiť, že A_1A_6 (respektíve A_1P) je rovnobežné s A_2A_5 a taktiež A_1A_2 je rovnobežné s A_5A_{10} (respektíve A_5P). Z toho vyplýva, že $A_1A_2A_5P$ je rovnobežník, čiže protiľahlé strany sú rovnako dlhé. Tým pádom sme dokázali, že úsečka A_1A_2 je rovnako dlhá ako úsečka A_5P, čo bolo našou úlohou.



Asi jediná, čo obišla dôkaz, že bod P patrí úsečke A_5A_{10}, bola Deniska Semanišinová. Jej riešenie je veľmi elegantné, preto si aj tento spôsob ukážeme.
Vieme, že priamka A_8A_{11} je rovnobežná s PA_1 (keďže tá je totožná s A_1A_6) a zároveň aj s A_2A_5. Ďalej A_1A_{11} je rovnobežná s A_8P (respektíve A_8A_4), preto $A_{11}A_1PA_8$ je rovnobežník. Z toho potom vyplýva, že veľkosť úsečiek A_8A_{11} a A_1P je rovnaká. Je jasné, že 4-uholníky $A_8A_9A_{10}A_{11}$ a $A_2A_3A_4A_5$ sú zhodné, preto úsečky A_8A_{11} a A_2A_5 sú zhodné. Z toho všetkého vyplýva, že aj úsečky A_1P a A_2A_5 sú zhodné a rovnobežné, preto aj $A_1A_2A_5P$ je rovnobežník.

c) Zrejme bod S leží na úsečke A_2A_8, keďže kružnica l je Tálesova kružnica nad priemerom A_2A_8. Chceme dokázať, že stred kružnice k leží na úsečke A_8A_{12}. Vieme, že v osovej súmernosti podľa priamky A_1A_8 sa stred kružnice l (bod S) zobrazí do stredu kružnice k. Pozrime sa na uhly $A_1A_8A_2$ a $A_1A_8A_{12}$. Keďže to sú obvodové uhly prislúchajúce rovnako dlhým tetivám A_1A_2 a A_1A_{12}, tak $|\sphericalangle A_1A_8A_2| = |\sphericalangle A_1A_8A_{12}|$. Potom sa však priamka A_2A_8 v osovej súmernosti podľa priamky A_1A_8 zobrazí na priamku $A_{12}A_8$. Bod S však leží na A_2A_8, čiže jeho obraz bude ležať na $A_{12}A_8$, čím sme tvrdenie zo zadania dokázali.



Komentár: Väčšina z vás sa vybrala podobným smerom, akým je písané vzorové riešenie; využívaním obvodových a stredových uhlov a osovej súmernosti. Avšak len málo riešiteľov to dotiahlo úplne dokonca, preto museli ísť body dole. Našli sa aj takí, ktorí to dokazovali hrubou silou, pomocou sínusov, kosínusov a tak podobne, čo nebolo až také elegantné (aj keď tiež správne riešenie). No pár riešení bolo naozaj pekných a originálnych, tie sme potom odmenili hlasom. Nezabúdajte na písanie všetkého, čo ste robili, aby sme si nemuseli domýšľať. Prajeme dobré nápady a tešíme sa na pekné a elegantné riešenia.

4. Nájdite všetky postupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ zložené z desiatich prirodzených čísel, ktoré majú obe nasledujúce vlastnosti:
(1) pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ platí $1 \leq a_i \leq 100$;
(2) ak $i, j \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, tak číslo $i + j$ delí $a_i + a_j$.

Opravoval: Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 24**

Riešenie:

Položením $i = j$ v druhej vlastnosti dostávame, že nutne $2i|2a_i$ ($2i$ delí $2a_i$). Z toho vidíme, že pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ musí byť člen a_i deliteľný číslom i. Každý člen našej postupnosti preto vieme zapísať v tvare $a_i = i \cdot k_i$, kde k_i ($i = 1, 2, \ldots, 10$) sú nejaké prirodzené čísla. Ukážeme teraz, že pre danú postupnosť musí nutne platiť $k_1 = k_2 = \ldots = k_{10} = k$, kde k je ľubovoľné číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Uvažujme najprv posledné dva členy tejto postupnosti a_9 a a_{10}. Zo zadania vieme, že musí platiť $19|a_{10} + a_9$, čiže $19|(10k_{10} + 9k_9)$. Keďže $19|19k_{10}$, tak určite platí

$$19|(10k_{10} + 9k_9) - 19k_{10} = -9(k_{10} - k_9).$$

Čísla 9 a 19 sú nesúdeliteľné a teda 19 nutne musí deliť $k_{10} - k_9$. Ak by bol tento výraz rôzny od nuly, dostali by sme spor s podmienkou (1). Preto $a_{10} = 10k$ a $a_9 = 9k$, kde sme zaviedli spoločné označenie $k_{10} = k_9 = k$.
Podobnou úvahou vieme ukázať, že $17|k_{10} - k_7)$ a $17|k_9 - k_8$. Z toho plynie, že aj $k_7 = k_8 = k$. Teraz sa pozrime na člen a_5. Preň musia platiť vzťahy $14|a_5 + 9k$ a $13|a_5 + 8k$. Z prvého z nich vieme ukázať, že $14|k_5 - k$ a z druhého $13|k_5 - k$. Čísla 13 a 14 sú nesúdeliteľné a teda rozdiel $k_5 - k$ musí byť násobkom $14.13 = 182$. Keďže ale $k_5 < 20$, máme $k_5 - k$ musí byť rovné 0, z čoho opäť $k_5 = k$.
Analogickým spôsobom postupujeme pri ďalších číslach:

- pre a_6 využijeme $11|a_5 + a_6$ a $13|a_6 + a_7$
- pre a_4 využijeme $11|a_4 + a_7$ a $13|a_4 + a_9$
- pre a_3 využijeme $11|a_3 + a_8$ a $10|a_3 + a_7$
- pre a_2 využijeme $11|a_2 + a_9$ a $9|a_2 + a_7$
- pre a_1 využijeme $10|a_1 + a_9$ a $11|a_1 + a_{10}$

Ľahko vieme overiť, že každá takáto postupnosť $\{k_i\}_{i=1}^{10}$ vyhovuje obom podmienkam v zadaní úlohy. Keďže $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, tak

$$a_i = k_i \leq 10 \cdot 10 = 100 \qquad \text{pre každé } i \in \{1, 2, \ldots, 10\}.$$

Druhú vlasnosť táto postupnosť taktiež spĺňa $a_i + a_j = k(i + j)$, a preto $i + j|a_i + a_j$.

Komentár: Mnohí z vás našli daných desať postupností, ktoré sú riešeniami. Urobili ale chybu v tom, že neukázali, že žiadna iná postupnosť vyhovujúva zadaniu už neexistuje. V zadaní bola ale podmienka „Nájdite všetky postupnosti…“. Takto postavená úloha znamená nielen nájsť všetky postupnosti, ale zároveň aj ukázať, že žiadna iná postupnosť nespĺňa dané podmienky. Mnohí z vás si toto neuvedomili, a preto nezískali plný počet bodov. Najkrajšie riešenia mali Maťo Vodička a Kaja Ficková.

Poradie po 1. sérii letného semestra 34. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	H	CS
1.	Dávid Hvizdoš	3. A	GPoštKE	9	9	9	9	1	45
	Martin Vodička	Kvinta	GAlejKE	9	9	9	9	1	45
3.	Klára Ficková	2. A	GPoštKE	8	9	9	9	1	44
4.	Radovan Hnatič	2. A	GPoštKE	5	9	6	9	0	38
5.	Matúš Stehlík	Septima	GAlejKE	9	9	7	5	0	37
6.	Andrej Kozák	Septima A	GGrösBA	9	9	7	4	3	36
	Viktor Szabados	3. B	GGrösBA	9	9	9	-	0	36
8.	Kristína Faguľová	2. A	GPoštKE	6	8	8	5	0	35
	Jakub Šafin	1. G	GMasaMI	8	-	9	9	0	35
10.	Monika Zlaczka	3. A	GPoštKE	9	9	6	4	0	34
	Michal Kopf	2. A	GSlezCZ	9	9	7	-	0	34
	Peter Milošovič	3. A	GPoštKE	9	9	6	4	0	34
13.	Pavol Koprda	Sexta A	GHvieTT	9	9	-	5	0	32
	Miroslav Stankovič	9. A	ZKro4KE	5	9	7	2	0	32
15.	Vladimír Macko	1. A	GHronZV	7	9	2	4	0	31
16.	Štěpán Šimsa	Kvinta	GJJLit	9	9	-	2	2	29
	Martina Hlavatá	Septima	GGrösBA	6	9	5	4	0	29
18.	Jaroslav Petrucha	Kvinta	GMetoBA	7	8	-	5	0	28
19.	Denisa Semanišinová	Kvinta	GAlejKE	8	3	8	-	1	27
	Katarína Krajčiová	Tercia	GAlejKE	-	9	9	-	5	27
21.	Miroslava Vašková	3. A	GMudrPO	5	5	6	5	0	26
22.	Martin Rapavý	Kvarta B	GAlejKE	7	8	2	-	0	25
23.	Róbert Solárik	1. A	GPoštKE	9	-	6	-	0	24
24.	Ladislav Hovan	3. A	GExnáKE	8	2	7	3	0	23
	Petra Zibrínová	3. A	GMudrPO	6	-	7	5	1	23
26.	Alžbeta Bohiniková	Septima	GGrösBA	2	3	9	3	0	20
	Dorota Jarošová	Tercia	GAlejKE	4	8	-	-	0	20
	Ivana Gašková	Sexta	GAlejKE	5	5	-	5	0	20
	Miloslav Homer	2. A	GPoštKE	6	-	5	4	0	20
30.	Zuzana Baxová	2. E	G1májTN	5	9	-	-	0	19
31.	Daniela Harčarufková	2. A	GPoštKE	6	-	2	5	0	18
32.	Denisa Múthová	3. A	GRužiŽA	5	5	3	-	0	16
	Lucia Magurová	1. A	GPoštKE	-	-	8	-	0	16
	Alexandra Pistráková	2. A	GPoštKE	4	-	8	-	0	16
35.	Michaela Belanová	Sexta	GTeplBA	7	-	4	-	0	15
36.	Veronika Koľveková	2. A	GPoštKE	4	-	-	6	0	14
37.	Barbora Marečáková	Sexta	GKukuPP	4	3	-	-	0	10
38.	Michal Anderle	Septima	GHaliLC	9	-	-	-	0	9
	Dáša Krasnayová	Septima	GAlejKE	8	-	-	1	0	9
	Tomáš Babej	3. A	GPoštKE	-	9	-	-	0	9
41.	Veronika Vlčková	Septima	GOkruZV	5	-	3	-	0	8
	Ján Jursa	9. A	ZKro4KE	3	0	2	-	0	8
	Ján Dudič	1. A	GPoštKE	4	-	-	-	0	8
	Dávid Lupták	1. F	GTajoBB	0	0	4	-	0	8

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	H	CS
45.	Štefánia Klimová	Kvinta	GSNPGL	3	-	1	-	0	7
46.	Ivana Sopatová	1. A	GPoštKE	-	-	2	-	0	4

Pohár konštruktérov po 1. sérii letného semestra 34. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	15	359
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	8	210
3.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	4	121
4.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	2	49
5.	ZKro4KE	Základná škola Krosnianska 4 040 22 Košice	2	40
6.	GMasaMI	Gymnázium Pavla Horova Masarykova 1 071 79 Michalovce	1	35
7.	GSlezCZ	Slezské Gymnázium Zámecký okruh 29 746 01 Opava	1	34
8.	GHvieTT	Gymnázium Angely Merici Hviezdoslavova 10 917 01 Trnava	1	32
9.	GHronZV	Gymnázium Hronská 1467/3 960 01 Zvolen	1	31
10.	GJJLit	Gymnázium Josefa Jungmanna Svojsíkova 1 412 65 Litoměřice	1	29
11.	GMetoBA	Gymnázium Metodova 2 821 08 Bratislava 2	1	28
12.	GExnáKE	Gymnázium Exnárova 10 040 22 Košice	1	23
13.	G1májTN	Gymnázium 1. mája 2 911 01 Trenčín	1	19
14.	GRužiŽA	Gymnázium bilingválne T. Ružičku 3 010 01 Žilina	1	16
15.	GTeplBA	Gymnázium Teplická 7 831 02 Bratislava 3	1	15
16.	GKukuPP	Gymnázium Kukučínova 058 39 Poprad	1	10
17.	GHaliLC	Gymnázium Haličská cesta 9 984 03 Lučenec	1	9
18.	GOkruZV	Gymnázium Okružná 2469 960 01 Zvolen	1	8
	GTajoBB	Gymnázium J. G. Tajovského 25 974 01 Banská Bystrica	1	8
20.	GSNPGL	Gymnázium SNP 1 056 80 Gelnica	1	7

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
  LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 4 • Apríl 2010 • Letný semester 34. ročníka (2009/2010)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`