STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Čaute!

Dúfame, že ste si prázdniny užili. Že ste to s ničím neprehnali, že ste svojou prítomnosťou potešili celú rodinu a že ste si pri žiadnej zábavnej aktivite neublížili. A hlavne, že ste stihli všetko, čo ste chceli. Lebo nie je nič horšie, ako byť povinnosťami vytrhnutý zo sladkého oddychu. Aby prechod na školský režim nebol taký náročný, pripravili sme pre vás aj tento rok zaujímavé úlohy. Takto môžete pokračovať v tom, čo ste aj tak robili celé prázdniny – premýšľali nad riešením, so všeličím rátali a kadečo si dokazovali. Nemáte za čo a nech sa vám darí!

Váš **STROM**

Čo je seminár STROM?

Seminár **STROM** (**S**úťaž **T**alentovaných **R**iešiteľov **O**bľubujúcich **M**atematiku), organizovaný Združením STROM, je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Tento seminár je *bezplatný* a je určený najmä pre žiakov stredných škôl, no zapojiť sa môžu aj mladší. Každý školský rok čakajú na riešiteľov dva semestre, v ktorých dostanú zadania dvoch sérií príkladov.
Tí najlepší riešitelia sa potom dostanú na týždňové sústredenie a zažijú veľa zábavy. Sústredenia na konci semestrov majú byť pre žiakov odmenou a zároveň motiváciou pre pokračovanie a zlepšovanie sa v riešení matematických seminárov.
Samotná korešpondenčná časť je v priebehu roka doplňovaná rôznymi akciami. Každoročne organizujeme Matboj, matematickú súťaž pre družstvá, ale aj zábavné hry, výlety alebo športové stretnutia. Našim cieľom je ukázať žiakom krásu matematiky, niekedy aj netradičným a hravým spôsobom. Preto dúfame, že náš seminár a s ním spojené akcie si nájdu svojich stálych nadšencov v radoch žiakov, ale aj podporovateľov v radoch učiteľov.

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci z nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov.
Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete posielať poštou alebo e-mailom, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zvážte, či nenapíšete svoje riešenie na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

V prípade zasielania riešení e-mailom ich posielajte na e-mailovú adresu `riesenia@strom.sk` vo formáte PDF. Všetky úlohy môžete poslať jedným e-mailom; do predmetu napíšte (bez diakritiky) STROM - vaše priezvisko. Prílohy označte svojím priezviskom, sériou a číslom príkladu. Napríklad riešiteľ Jožko Mrkvička pošle e-mail s predmetom `STROM - Mrkvicka` a jeho prílohy (riešenia úloh 2 a 5) budú označené `Mrkvicka_1seria_2uloha.pdf` a `Mrkvicka_1seria_5uloha.pdf`.
Vaše riešenia musia dôjsť do 22:00 v deň termínu série a len na uvedenú adresu. Ich prijatie bude potvrdené e-mailom. Technické problémy na našej či vašej strane nie sú dôvodom na akceptovanie riešení doručených po termíne. Akceptujeme prvé riešenie danej úlohy, ktoré pošlete.
Riešitelia, ktorí svoje riešenia pošlú elektronicky, dostanú opravené riešenia e-mailom na adresu, z ktorej svoje riešenia poslali.
S prvou sériou, ktorej riešenia nám posielate, pošlite vyplnenú **prihlášku**. Riešenie každej úlohy píšte na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail `strom@strom.sk`, prostredníctvom debaty na našej stránke alebo osobne.
Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Podrobné pravidlá vrátane bodovania nájdete na stránke `http://seminar.strom.sk`.

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia a členovia minimálne prvých troch najlepších družstiev z matboja, ak sa v príslušnom polroku koná. Prípadní ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROM**u a matboja; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Na sústredenie nebudú na základe poradia **STROM**u vôbec pozvaní riešitelia, ktorí získali v príslušnom semestri menej ako 20 bodov.

Zadania úloh zimného semestra 38. ročníka

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **21. 10. 2013**

1. Nájdite všetky kladné celé čísla m, n, pre ktoré platí $3m + n = mn$.

2. Dokážte, že v každom trojuholníku platí nasledujúca nerovnosť pre súčet dĺžok strán a ťažníc

$$a + b + c > t_a + t_b + t_c > \frac{3}{4}(a + b + c).$$

3. Dokážte, že ak ľubovoľne zvolíme 7 navzájom rôznych prvočísel, súčin všetkých ich kladných rozdielov je deliteľný číslom 163 840.

4. Nech pre reálne čísla a, b, c platí, že $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Nájdite minimum výrazu

$$\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{a^2c^2}{b^2}.$$

5. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí $|AD| = |BC|$ a $|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle CDB| = 180°$. Dokážte, že $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD|$.

6. Niekoľko robotov je umiestnených na štvorcovej sieti, v ktorej každá strana každého štvorca je buď priechodná alebo nepriechodná (nie nutne všetky strany rovnako), pričom okraje celej siete sú všetky nepriechodné. Na tom istom políčku môže byť ľubovoľne veľa robotov naraz. Môžete ľubovoľne rozdávať príkazy: hore, dole, vľavo, vpravo. Všetci roboti ich súčasne poslúchnu a snažia sa pohnúť prikázaným smerom. Ak je tým smerom nepriechodná strana, robot zostane na mieste, inak sa pohne na susedné políčko určeným smerom. Takýchto príkazov môžete vykonať ľubovoľný počet. Vieme, že pre každého robota a každé políčko existuje nejaká postupnosť príkazov ako ho dostať na toto políčko. Dokážte, že existuje taká postupnosť príkazov, že všetci roboti skončia naraz na jednom políčku.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **25. 11. 2013**

1. Majme ostrouhlý trojuholník ABC s $|AB| = 12$ cm a obsahom $S = 24$ cm^2. Je v ňom vpísaný štvorec tak, že jedna strana štvorca leží na strane AB a zvyšné dva vrcholy na zvyšných dvoch stranách. Aká dlhá je strana štvorca?

2. Určte, či existuje prirodzené číslo k také, že všetky kladné celé čísla od 1 do k vieme rozdeliť do dvoch skupín tak, že ak v každej skupine čísla vhodne usporiadame za sebou (v nejakom poradí bez medzier), tak sa vytvoria dve nové čísla, ktoré sú rovnaké.

3. Bod D leží na priemere AB polkružnice k. Kolmica na AB prechádzajúca bodom D pretína k v bode C. Dĺžky kružnicových oblúkov AC a CB sú v pomere 1:2. Nájdite hodnotu pomeru $|AD| : |DB|$.

4. Na stole sú tri tyče označené písmenami A, B a C. Na tyči A je nastoknutých 10 deravých mincí. Každá má inú veľkosť a sú zoradené od najmenšej naspodku po najväčšiu na vrchu. Na ostatných tyčiach nie je žiadna minca. Na koľko najmenej presunutí sa dá týchto 10 mincí presunúť na tyč C, ak vždy môžeme presúvať iba jednu mincu naraz, nikdy nemôžeme položiť menšiu na väčšiu a jediné dovolené presuny sú medzi tyčami A a B a medzi tyčami B a C?

5. Nájdite všetky kladné celé čísla x, y, z, pre ktoré platí $4^x + 3^y = z^2$.

6. Dokážte, že neexistuje taká funcia $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, že pre všetky kladné reálne x, y platí:

$$f(f(x))^2 = (f(x) + y)f(x + y)$$

Mohlo by sa hodiť...

AG-nerovnosť: Pre kladné reálne čísla $a_1, a_2 \dots a_n$ platí, že ich aritmetický priemer je väčší nanajvýš rovný ich geometrickému priemeru, t.j.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Rovnosť nastáva práve pri rovnosti čísel a_1 až a_n.

Obvodové uhly: Nad tetivou v kružnici vidno ľubovoľný bod na tom istom kružnicovom oblúku pod rovnakým uhlom – ten nazývame obvodovým. Dve tetivy sú rovnako dlhé práve vtedy, keď ich obvodové uhly majú rovnakú veľkosť. V konvexnom štvoruholníku vpísanom do kružnice (nazývame ho tetivovým) je súčet protiľahlých uhlov vždy priamy uhol.

Matematická indukcia: Ak sa snažíme niečo dokázať pre všetky prirodzené čísla počnúc niektorým, stačí nám ukázať platnosť nášho tvrdenia pre toto počiatočné číslo a potom ukázať platnosť tvrdenia „ak naše tvrdenie platí pre číslo n, potom platí aj pre číslo $n + 1$“.

Rovnice s prirodzenými číslami: Najosvedčenejším spôsobom, ako zistiť riešenie rovnice s prirodzenými číslami, je skúmať deliteľnosť. Najlepším tvarom, v akom sa deliteľnosť skúmať dá, je súčin. Preto sa netreba báť použiť rôzne vzorce pre rozklad mnohočlenov, ako napríklad $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 4, 4a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ a podobne.

Funkcionálne rovnice: Patria k najabstraktnejším úlohám vôbec a pre ich úspešné riešenie odporúčame prešudovať si najprv nejaký materiál, napríklad tento venovaný iba riešeniu podobných príkladov `www.karlin.mff.cuni.cz/olympiada/anotace/musil.pdf`.

Veľké hodnoty: Niekedy je pomerne náročné odhaliť riešenie, pretože sa v ňom vyskytujú príliš veľké čísla, alebo mnoho možností takých, ktoré všetky nevieme rozobrat. Oplatí sa preto napriek zadaniu zmeniť konštantu v ňom a skúsiť úlohu vyriešiť pre menšie čísla alebo menší počet kombinácií. Možno sa nám podarí odpozorovať závislosť "veľkých" prípadov od "malých".

Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail `strom@strom.sk`.

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
  LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov	**STROM** – korešpondenčný matematický seminár
	Číslo 1 • September 2013 • Zimný semester 38. ročníka (2013/2014)
Internet:	`http://seminar.strom.sk`
E-mail:	`strom@strom.sk`
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	`http://www.strom.sk`
E-mail:	`zdruzenie@strom.sk`