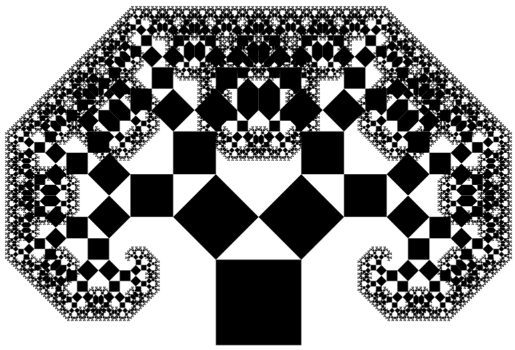
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Čau Stromáci!



Chýbali sme vám? Áh, my veľmi dobre vieme, že áno. Preto sa teraz vraciame a nenesieme vám nič iné, ako ďalšie dve série plné zbrusu nových matematických problémov! Tie už netrpezlivo čakajú na vaše dlhé pohľady, či už zamyslené a plné odhodlania, alebo utrápené, bezradné a unavené po dlhej prebdenej noci. Dúfame teda, že príklady vás spať nechajú, v opačnom prípade neváhajte checknúť rubriku „Mohlo by sa hodiť…“ pre nejaké tie hinty. Na záver snáď už len poprajeme vysokú efektivitu vášho života, takže skúste podať vždy čo najvyšší výkon pri najmenšej námahe a svet bude zaraz krajší.

Vaši **STROM**isti

Náboj

Nezadržateľne sa k nám blíži aj najväčšia tímová súťaž roku, a to náš obľúbený Náboj. Tento rok sa uskutoční 11. 4. 2014, dokonca s ešte väčšou účasťou škôl ako minulé roky. Zapoja sa mestá Praha, Bratislava, Opava, Košice, Passau a Oulu, takže konkurencia bude naozaj vysoká. Ak o súťaži veľa neviete a chceli by ste sa so svojou školou zapojiť, prípadne získať nejaké informácie naviac, navštívte `http://math.naboj.org`. Detaily sa budú čoskoro posielať aj na školy. Stromáci sa na vás už tešia v Košiciach :)

2% z daní

Aj tento rok môžu vaši rodičia venovať 2% zo svojich daní verejno–prospešným organizáciám ako sme my (dokonca niektorí až 3%).
Peniaze získané z 2% v **STROM**e využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústredeniach, …).
Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a kľudne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh semináru a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispejú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.
Potrebné informácie o tom, ako darovať 2% z daní, nájdete na našej web stránke `http://zdruzenie.strom.sk` a radi vám zodpovieme na ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj mailom na `info@strom.sk`. Ďakujeme!

Čo je seminár STROM?

Seminár **STROM** (**S**úťaž **T**alentovaných **R**iešiteľov **O**bľubujúcich **M**atematiku), organizovaný Združením STROM, je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Tento seminár je *bezplatný* a je určený najmä pre žiakov stredných škôl, no zapojiť sa môžu aj mladší. Každý školský rok čakajú na riešiteľov dva semestre, v ktorých dostanú zadania dvoch sérií príkladov.
Tí najlepší riešitelia sa potom dostanú na týždňové sústredenie a zažijú veľa zábavy. Sústredenia na konci semestrov majú byť pre žiakov odmenou a zároveň motiváciou pre pokračovanie a zlepšovanie sa v riešení matematických seminárov.

Samotná korešpondenčná časť je v priebehu roka dopĺňovaná rôznymi akciami. Každoročne organizujeme Matboj, matematickú súťaž pre družstvá, ale aj zábavné hry, výlety alebo športové stretnutia. Našim cieľom je ukázať žiakom krásu matematiky, niekedy aj netradičným a hravým spôsobom. Preto dúfame, že náš seminár a s ním spojené akcie si nájdu svojich stálych nadšencov v radoch žiakov, ale aj podporovateľov v radoch učiteľov.

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov.
Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete posielať poštou alebo e-mailom, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zvážte, či nenapíšete svoje riešenia na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

V prípade zasielania riešení e-mailom ich posielajte na e-mailovú adresu `riesenia@strom.sk` vo formáte PDF. Ak máš riešenia v inom formáte, prekonvertuj ich do PDF. A nezabudni, ak riešenie odfotíš digitálnym fotoaparátom, skontroluj si, či je kompletné a čitateľné. Všetky úlohy môžete poslať jedným e-mailom; do predmetu napíšte (bez diakritiky) STROM – vaše priezvisko. Prílohy označte svojím priezviskom, sériou a číslom úlohy. (Samozrejme aj strany v PDF majú obsahovať tvoje meno, priezvisko, triedu a školu, a ak je riešenie dlhšie ako jedna strana, tak na každej strane aspoň meno a priezvisko.) Napríklad riešiteľ Jožko Mrkvička pošle e-mail s predmetom `STROM - Mrkvicka` a jeho prílohy (riešenia úloh 2 a 5) budú označené `Mrkvicka_1seria_2uloha.pdf` a `Mrkvicka_1seria_5uloha.pdf.`
Vaše riešenia musia dôjsť do 22:00 v deň termínu série a len na uvedenú adresu. Ich prijatie bude potvrdené e-mailom. Technické problémy na našej či vašej strane nie sú dôvodom na akceptovanie riešení doručených po termíne. Akceptujeme prvé riešenie danej úlohy, ktoré pošlete. Odoslanie po termíne je postihnuté strhnutím bodov, v závislosti od omeškania zaslaného riešenia.
S prvou sériou, ktorej riešenia nám posielate, pošlite vyplnenú **prihlášku**. Riešenie každej úlohy píšte na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail `strom@strom.sk`, prostredníctvom debaty na našej stránke alebo osobne.
Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

štvrtáci, oktáva:	všetky vyriešené úlohy
tretiaci, septima:	všetky vyriešené úlohy
druháci, sexta:	päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh
prváci, kvinta a mladší:	päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

Príklad použitia pravidiel:
Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) – za $3, 2, 4, 1, 5$ a 4 body. Vlado potom získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Fero tiež získal $3+2+4+1+5+4 = 19$ bodov, Jaro $(3+\underline{2}+4+5+4)+2 = 20$ bodov a Marcel $(3+2+4+\underline{5}+4)+5 = 23$ bodov. Jasné, nie?

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešení zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrená.

Hlasovanie úloh závisí od zaujímavosti a jedinečnosti vášho riešenia. Radosť vám môže spraviť 1 hlas (prehľadné, jasné riešenie), alebo 2 či 3 hlasy za výnimočné a originálne nápady. Ak nájdete riešenie v literatúre, kladné hlasy si nepripočítate. Naopak, hrôzu budiace riešenia (výzorom, zložitosťou) získajú -1 hlas. Horšie obídu tí, ktorým opakovane za odpisovanie strhneme body. Po ich vydelení počtom odpisujúcich dostanú -3 hlasy, po veľkom odpisovaní je to -5 hlasov za každú odpísanú úlohu. Riešiteľ s najväčším počtom hlasom si zaslúži sladkú odmenu a naopak tí, čo získajú menej ako -2 hlasy si sústredko nezaslúžia. Tak hor sa do hľadania pekných riešení, zabudnime na odpisovanie a hrajme sa s matematikou!
Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia a členovia minimálne prvých troch najlepších družstiev z matboja, ak sa v príslušnom polroku koná. Prípadní ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROM**u a matboja; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Na sústredenie nebudú na základe poradia **STROM**u vôbec pozvaní riešitelia, ktorí získali v príslušnom semestri menej ako 20 bodov.

Zadania úloh letného semestra 38. ročníka

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **17. 3. 2014**

1. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n > 3$, ktoré je nedeliteľné 3 platí, že šachovnicu $n \times n$ je možné rozrezať na jeden štvorec 1×1 a obdĺžniky 3×1.

2. Majme štvoruholník $ABCD$, ktorého uhlopriečky sa pretínajú v bode E a uhlopriečku AC rozdeľujú body E, S a R na 4 rovnako dlhé úseky ($|AE| = |ES| = |SR| = |RC| = \frac{1}{4}|AC|$). Obdobne uhlopriečku BD rozdeľujú body Q, P a E na 4 rovnako dlhé úseky ($|BQ| = |QP| = |PE| = |ED| = \frac{1}{4}|BD|$). Určte pomer obsahov štvoruholníkov $ABCD$ a $PQRS$.

3. Nech pre kladné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí, že súčet ich druhých mocnín je z^2. Dokážte, že súčet ich tretích mocnín je nanajvýš z^3.

4. Nájdite všetky prirodzené čísla a, b, pre ktoré platí $a + b + D(a, b) + n(a, b) = 50$, pričom $D(a, b)$ označuje najväčšieho spoločného deliteľa a $n(a, b)$ najmenší spoločný násobok čísel a a b.

5. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí: $\binom{2n}{n}$ delí najmenší spoločný násobok čísel $1, 2, \ldots, 2n$.

6. Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ak poznáte AB, AD, uhly pri vrcholoch B a D a navyše viete, že sa mu dá vpísať kružnica. Okrem postupu nezabudnite hlavne na dôkaz správnosti tejto konštrukcie.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **5. 5. 2014**

1. Nájdite všetky trojice reálnych čísel x, y, z, pre ktoré platí:

$$x^2 = y + z, \qquad y^2 = z + x, \qquad z^2 = x + y.$$

2. Nájdite najväčšie trojciferné číslo deliteľné 11, ktorého súčin cifier je piata mocnina.

3. Máme jednu kocku a ľubovoľné prirodzené číslo $k > 55$. Ukážte, že našu kocku vieme rozrezať na k menších, nie nutne rovnako veľkých kociek, t.j. rozdeliť ju na k kúskov tak, aby každý z nich bol kockou, bez ohľadu na to, aké $k > 55$ si zvolíme.

4. V štvoruholníku $ABCD$ sú pravé uhly pri vrcholoch B a D. AM a CN sú výšky v trojuholníkoch ABD a CBD. Dokážte, že $|BN| = |DM|$.

5. Nech n je prirodzené číslo. Ďalej uvažujme len postupnsti dĺžky $2n + 2$ zložené len z núl a jednotiek. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré vieme vybrať k *„vyvolených“* postupností takých, že každá postupnosť sa zhoduje s nejakou vyvolenou na aspoň $2n + 2$ pozíciách.

6. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré ak $p(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientami taký, že $0 \le p(k) \le n$ pre $k = 0, 1, 2, \ldots, n + 1$, potom $p(0) = p(1) = \cdots = p(n + 1)$.

Mohlo by sa hodiť...

Rozklad na prvočísla a najmenší spoločný násobok: Každé prirodzené číslo n sa dá jediným spôsobom rozložiť na súčin rôznych prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_k$ menších alebo rovných n tak, že

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}.$$

Vezmime si teraz prirodzené čísla $n_1, n_2, \ldots, n_t$ a ich rozklady na prvočísla

$$n_1 = p_1^{a_1^1} \cdot p_2^{a_2^1} \cdots p_k^{a_k^1}$$

$$\vdots$$

$$n_t = p_1^{a_1^t} \cdot p_2^{a_2^t} \cdots p_k^{a_k^t}.$$

Označme $m_1 = max\{a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^t\}$, ..., $m_k = max\{a_k^1, a_k^2, \ldots, a_k^t\}$, potom najmenší spoločný násobok týchto čísel bude

$$nsn(n_1, n_2, \ldots, n_k) = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}.$$

AG - nerovnosť: Pre kladné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí, že ich aritmetický priemer je väčší, nanajvýš rovný, ich geometrickému priemeru, t.j.

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Matematická indukcia: Ak sa snažíme niečo dokázať pre všetky prirodzené čísla počnúc niektorým, stačí nám ukázať platnosť nášho tvrdenia pre toto počiatočné číslo a potom ukázať platnosť tvrdenia: „ak naše tvrdenie platí pre číslo n, potom platí aj pre číslo $n + 1$“.

Polynómy s celočíselnými koeficientami: Nech P je polynóm s celočíselnými koeficientami a a, b sú celé čísla. Potom platí, že číslo $(a - b)$ delí číslo $P(a) - P(b)$.

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach

Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 4 • Február 2014 • Letný semester 38. ročníka (2013/2014)
Internet:	`http://seminar.strom.sk`
E-mail:	`strom@strom.sk`
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	`http://www.strom.sk`
E-mail:	`zdruzenie@strom.sk`