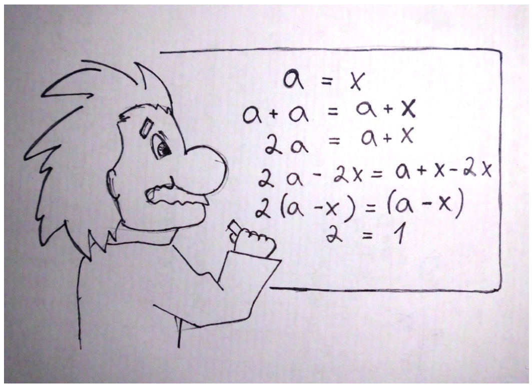
STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Čau Stromáci!

Ako to už zvykom býva, začína sa školský rok a vy v rukách držíte novú sériu Stromu. A ako to už zvykom býva, vždy tu nájdete úvod plný povzbudivých slov, srdečných prianí, konštatovania a zopár postrehov o tom, aké boli prázdniny skvelé, ale zároveň príliš krátke. Ako ste si určite užili, ale zároveň sa už tešíte na nový školský rok. Ako ste navštívili zaujímavé miesta, ale zároveň sa radi vraciate na tie známe. Ako ste zrejme prečítali množstvo kníh, ale zároveň zopár ešte čaká na poličke. Ako ste nachytali letný bronz, ale zároveň už stihol vyblednúť. Ale aj o tom, ako sa už tešíme na vás a vaše riešenia. A aby nebolo všetko až tak tradičné, až tak predvídateľné, či až tak zrejmé, dnes vás nebudeme chlácholiť my, ale rovno veľký pán Einstein: „Netrápte sa nad svojimi problémami s matematikou, môžem Vás uistiť, že tie moje sú ešte väčšie.“



Vaši **STROM**isti

Čo je seminár STROM?

Seminár **STROM** (**S**úťaž **T**alentovaných **R**iešiteľov **O**bľubujúcich **M**atematiku), organizovaný Združením STROM, je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Tento seminár je *bezplatný* a je určený najmä pre žiakov stredných škôl, no zapojiť sa môžu aj mladší. Každý školský rok čakajú na riešiteľov dva semestre, v ktorých dostanú zadania dvoch sérií príkladov.
Tí najlepší riešitelia sa potom dostanú na týždňové sústredenie a zažijú veľa zábavy. Sústredenia na konci semestrov majú byť pre žiakov odmenou a zároveň motiváciou pre pokračovanie a zlepšovanie sa v riešení matematických seminárov.
Samotná korešpondenčná časť je v priebehu roka doplňovaná rôznymi akciami. Každoročne organizujeme Matboj, matematickú súťaž pre družstvá, ale aj zábavné hry, výlety alebo športové stretnutia. Našim cieľom je ukázať žiakom krásu matematiky, niekedy aj netradičným a hravým spôsobom. Preto dúfame, že náš seminár a s ním spojené akcie si nájdu svojich stálych nadšencov v radoch žiakov, ale aj podporovateľov v radoch učiteľov.

Košický Matboj

Už 14. ročník tejto súťaže sa uskutoční 24. októbra 2014 v CVČ Domino v Košiciach. Inštrukcie k prihlasovaniu na túto súťaž budú rozposlané na školy v druhej polovici septembra. Ak ste o súťaži doposiaľ nepočuli a radi by ste sa dozvedeli viac, zavítajte na `http://seminar.strom.sk/matboj/`.

Matematický krúžok

Aj v školskom roku 2014/2015 sa na **Prírodovedeckej fakulte UPJŠ** v Košiciach na Jesennej 5 bude konať v prípade dostatočného záujmu každý týždeň matematický krúžok, ktorý bude zameraný hlavne na prípravu na Matematickú olympiádu v kategóriách A, B a C.
Krúžku sa môže zúčastniť ktorýkoľvek stredoškolák (ale i šikovný základoškolák), ktorý sa chce venovať Matematickej olympiáde. Ak máš o krúžok záujem, vyplň anketu na stránke krajskej komisie MO: `umv.science.upjs.sk/mo`.

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov.

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete posielať poštou alebo e-mailom, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zvážte, či nenapíšete svoje riešenia na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

S prvou sériou, ktorej riešenia nám posielate, pošlite vyplnenú **prihlášku**, ktorú nájdeš na `http://seminar.strom.sk`). Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s Tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole (prázdniny...) v prípade pozývania na sústredenie a tiež aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti seminára. Ak si neplnoletý, je potrebné aby vo svojom evidenčnom lístku si uviedol i kontakt na rodiča, ktorý ako tvoj zákonný zástupca potvrdzuje správnosť údajov. Ak za teba evidenčný lístok vyplní škola, je potrebné, aby mala od rodiča súhlas na poskytnutie týchto údajov.

Elektronické odovzdávanie - pozor, zmena!

Svoje riešenia odovzdávajte do uvedeného termínu cez nový webový portál na stránke `seminar.strom.sk`. Aby ste mohli odovzdať úlohy, musíte si založiť užívateľský účet - odkaz (`Registrácia` v sekcii `Správa účtu`).

Úlohy odovzdávajte primárne vo formáte PDF, portál na vaše riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC.

V prípade technických problémov na našej strane posielajte na e-mailovú adresu `riesenia@strom.sk` vo formáte PDF.

V prípade elektronického odovzdávania nie je potrebné vyplniť a poslať evidenčný lístok, stačí vyplniť povinné údaje v užívateľskom profile po registrácii - odkaz (`Aktualizovať profil` v sekcii `Správa účtu`).

Riešenie každej úlohy píšte na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail `strom@strom.sk`, prostredníctvom debaty na našej stránke alebo osobne.

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

štvrtáci, oktáva:	všetky vyriešené úlohy
tretiaci, septima:	všetky vyriešené úlohy
druháci, sexta:	päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh
prváci, kvinta a mladší:	päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

Príklad použitia pravidiel:

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za $3, 2, 4, 1, 5$ a 4 body. Vlado potom získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Fero tiež získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Jaro $(3 + \underline{2} + 4 + 5 + 4) + 2 = 20$ bodov a Marcel $(3 + 2 + 4 + \underline{5} + 4) + 5 = 23$ bodov. Jasné, nie?

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešení zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrená.

Hlasovanie úloh závisí od zaujímavosti a jedinečnosti vášho riešenia. Radosť vám môže spraviť 1 hlas (prehľadné, jasné riešenie), alebo 2 či 3 hlasy za výnimočné a originálne nápady. Ak nájdete riešenie v literatúre, kladné hlasy si nepripočítate. Naopak, hrôzu budiace riešenia (výzorom, zložitosťou) získajú -1 hlas. Horšie obídu tí, ktorým opakovane za odpisovanie strhneme body. Po ich vydelení počtom odpisujúcich dostanú -3 hlasy, po veľkom odpisovaní je to -5 hlasov za každú odpísanú úlohu. Riešiteľ s najväčším počtom hlasom si zaslúži sladkú odmenu a naopak tí, čo získajú menej ako -2 hlasy si sústredko nezaslúžia. Tak hor sa do hľadania pekných riešení, zabudnime na odpisovanie a hrajme sa s matematikou!

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia a členovia minimálne prvých troch najlepších družstiev z matboja, ak sa v príslušnom polroku koná. Prípadní ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROM**u a matboja; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Na sústredenie nebudú na základe poradia **STROM**u vôbec pozvaní riešitelia, ktorí získali v príslušnom semestri menej ako 20 bodov alebo maju menej ako -2 hlasy.

Zadania úloh zimného semestra 39. ročníka

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **20. 10. 2014**

1. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí, že 6 delí $n^3 + 11n$.

2. Štvorciferné číslo $\overline{abcd}$, ktoré spĺňa podmienky

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$

$$a + b = c + d$$

nazývame *šikovné.* Koľko existuje *šikovných* štvorciferných čísel?

3. Robot Karol stojí na jednom z bodov nekonečnej štvorcovej mriežky. V hlave má dve pamäťové jednotky A a B. Keď sa pohne o jednu štvorcovú dĺžku smerom hore, číslo v jednotke A sa zväčší o 1. Naopak, ak sa pohne smerom dole, toto číslo sa zmenší o 1. Ak sa pohne smerom doprava, do jednotky B sa pričíta číslo v A a naopak, ak sa pohne smerom doľava, toto číslo sa od čísla v jednotke B odčíta. Robot Karol sa pri svojom pohybe riadi nasledovnými pravidlami:

- vždy sa posúva iba do najbližších susedných bodov siete (smerom hore, dole, doprava alebo doľava, nie uhlopriečne)
- nikdy sa neposunie do bodu mriežky, ktorý už navštívil (ak nejde o počiatočný bod trasy)

Ak viete, že robot Karol má na začiatku v oboch pamäťových jednotkách hodnotu 0, dokážte, že po ľubovoľnej prechádzke po štvorcovej sieti, pri ktorej sa vráti naspäť na pôvodné miesto, sa v pamäťovej jednotke B bude nachádzať číslo, ktorého absolútna hodnota udáva obsah plochy, ktorú svojou trasou ohraničil.

4. Máme desať vrecúšok a v každom je 100 mincí. V deviatich z nich sú pravé mince, ktoré vážia 10 gramov a v jednom sú falošné mince vážiace 11. Ako pomocou jedného váženia a digitálnej váhy zistíte, v ktorom vrecúšku sú falošné mince?

5. Nech H je ortocentrum ostrouhlého trojuholníka ABC. Dotyčnice z bodu A ku kružnici k zostrojenej nad priemerom BC sa dotýkajú kružnice k v bodoch P a Q. Dokážte, že body P, Q, H ležia na jednej priamke.

6. Určte všetky prirodzené čísla m, pre ktoré sa dá štvorec $m \times m$ rozdeliť na päť obdĺžnikov, ktorých dĺžky strán sú $1, 2, \ldots, 10$ v nejakom poradí.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **24. 11. 2014**

1. Ukážte, že pre všetky prirodzené čísla a, b, c, d platí, že $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(d-c)$ je deliteľné 12.

2. Majme postupnosť čísel, pre ktorú platí $a_2 = 5$ a $a_n = \lfloor \frac{n^2}{a_{n-1}} \rfloor$ pre $n > 2$. Zistite hodnotu a_{999} a svoje riešenie odôvodnite.

3. V trojuholníku ABC označme M ako stred strany BC a D vnútorný bod strany AB. Priesečník AM a CD nazveme E. Ukážte, že ak $|AD| = |DE|$, potom $|AB| = |CE|$.

4. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$n\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\Big) \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

5. Máme balíček $2n$ rôznych kariet. Každé zamiešanie zmení poradie kariet z $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ na $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$. Určte všetky n, pre ktoré ak zamiešame balíček 8-krát, budú karty v rovnakom poradí ako na začiatku.

6. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_{19}$ sú prirodzené čísla menšie rovné 93 a nech $y_1, \ldots, y_{93}$ sú prirodzené čísla menšie rovné 19. Dokážte, že potom existuje (nenulový) súčet niektorých x_i, ktorý je rovný súčtu niektorých y_j.

Mohlo by sa hodiť...

Postupnosť je funkcia, ktorej definičným oborom je podmnožina všetkých prirodzených čísel N. Funkčná hodnota tejto funkcie priradená číslu n sa nazýva n-tý člen postupnosti a značí sa napr. a_n.

Dolná celá časť reálneho čísla x, ktorú značíme $\lfloor x \rfloor$, predstavuje najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné číslu x. Platí teda, že $\lfloor x \rfloor = n$ práve vtedy, keď $n \leq x$ a zároveň $n + 1 > x$.

Mocnosť bodu ku kružnici a chordála: Majme v rovine bod M a danú kružnicu k so stredom S a polomerom r. Mocnosťou bodu M ku kružnici k nazývame reálne číslo $m = v^2 - r^2$, kde $v = |MS|$. Dá sa ukázať, že ak je bod M vo vonkajšej (resp. vnútornej) oblasti kružnice, a p je ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom M, ktorá pretína kružnicu k v bodoch P,Q, platí $m = |MP||MQ|$ (resp. $m = -|MP||MQ|$). Je zaujímavé, že tento súčin je rovnaký bez ohľadu na priamku p a je určený len bodom M a kružnicou k.
Majme teraz v rovine 2 kružnice k, l. Chordálou dvoch kružníc nazývame množinu všetkých bodov, ktoré majú rovnakú mocnosť k obom kružniciam. Dá sa ukázať, že chordálou dvoch nesústredných kružníc je vždy priamka kolmá na spojnicu ich stredov. Odtiaľ ľahko vyplýva, že chordálou dvoch pretínajúcich sa kružníc bude priamka určená ich priesečníkmi.
Viac o tejto téme sa môžete dozvedieť napr. z materiálu:
https://mks.mff.cuni.cz/library/MocnostAChordalyJT/MocnostAChordalyJT.pdf

Kongruencie a čínska zvyšková veta: Majme tri celé čísla a, b a m. Hovoríme, že a je kongruentné s b modulo m a píšeme $a \equiv b$ (mod m), ak rozdiel $a-b$ je deliteľný m. Číslo m nazývame modul kongruencie.
Čínska zvyšková veta: Riešme sústavu kongruencií s neznámou x

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_r \pmod{m_r} \end{aligned}$$

Nech pre každú dvojicu $i \neq j$ platí $NSD(m_i, m_j) = 1$. Potom existuje riešenie tejto sústavy a každé dve riešenia sú si navzájom kongruentné modulo $M = m_1 m_2 \dots m_r$.
Viac o tejto téme sa môžete dozvedieť napr. z materiálu:
http://mks.mff.cuni.cz/library/KongruenceMS/KongruenceMS.pdf

Drichletov princíp: Majme n predmetov a m priehradok. Chceme poukladať predmety do priehradok tak, aby každý predmet bol v práve jednej priehradke. Drichletov princíp je jednoduché tvrdenie, že ak je $n > m$ (predmetov viac ako priehradok), tak potom v aspoň jednej priehradke budú aspoň dva predmety.
Táto formulácia môže znieť neprakticky, no v rôznych úlohách môže byť tento princíp užitočný. Predstavte si napríklad čísla ako predmety a zvyšky po delení m ako priehradky. Vyriešite tak úlohu: dokážte, že z 11 čísel viete vybrať dve, ktorých rozdiel končí nulou.

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

Projekt podporila Nadácia pre deti Slovenska z fondu Hodina deťom

Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 1 • September 2014 • Zimný semester 39. ročníka (2014/2015)
Internet:	`http://seminar.strom.sk`
E-mail:	`strom@strom.sk`
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	`http://www.strom.sk`
E-mail:	`zdruzenie@strom.sk`