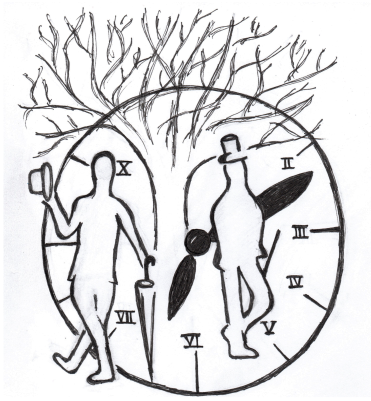
STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte!

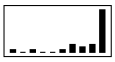


Zdá sa to neuveriteľné, ale vo chvíli, keď ste si mysleli, že vás už nič dobré nečaká, vás naozaj nič nečakalo. Nové číslo vášho milovaného STROMu si vás miesto nezmyselného čakania našlo priamo vo vašich školách a domovoch a konečne ukončilo vaše čakanie na Godota. Našťastie vám teraz už nezostáva nič iné, ako si pozrieť, čo ste naozaj spísali v deň termínu do tých vašich riešení a pokúsiť sa túto sériu spísať o niečo lepšie. Veľa šťastia vám želajú

Vaši nedočkaví **STROM**isti

1. Opravovali: Ivka Gašková, Dorot Jarošová

Počet riešiteľov: 27



Dokážte, že niektoré dve z reálnych čísel a, b, c, d sa líšia maximálne o 1, ak pre nich platí

$$\begin{aligned} ab + cd &= 1, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 4. \end{aligned}$$

Riešenie:

Označme rovnice postupne (1) a (2). Vidíme, že v druhej rovnici sa nachádzajú štvorce (teda druhé mocniny) a v prvej zmiešané členy, vhodnou kombináciou oboch rovníc by sme teda chceli dostať súčet mocnín dvojčlenov. Odčítaním dvojnásobku (1) od (2) dostaneme:

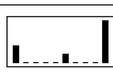
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2 \cdot ab - 2 \cdot cd &= 4 - 2 \\ a^2 - 2 \cdot ab + b^2 + c^2 - 2 \cdot cd + d^2 &= 2 \\ (a-b)^2 + (c-d)^2 &= 2 \end{aligned}$$

Oba sčítance v tejto rovnici sú štvorce, teda sú nezáporné. Ak by boli oba väčšie ako 1, ich súčet by bol väčší ako 2. Aspoň jeden zo sčítancov je teda menší alebo rovný ako 1, a teda rozdiel medzi niektorými dvoma zo sčítancov je najviac 1.

Komentár: Väčšina z vás prišla na to, že táto úloha nebola ťažkým orieškom. Preto sme dostali aj nejaké stručné a výstižné riešenia, ktoré nás samozrejme veľmi potešili. Kto sa však vydal iným smerom, než ukazuje vzorák, si riešenie poriadne skomplikoval.

2. Opravovali: Žanetka Semanišinová, Matúš Stehlík

Počet riešiteľov: 8



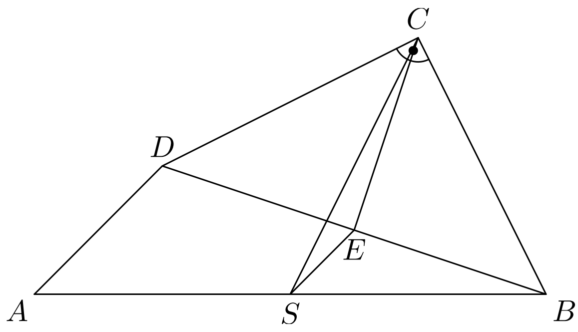
Majme konvexný štvoruholník $ABCD$ s pravým uhlom pri vrchole C. Označme S stred strany AB. Dokážte, že:

$$2 \cdot |CS| \leq |BD| + |DA|.$$

Ukážte tiež, kedy nastane rovnosť.

Riešenie:

Ak máme dokazovať takúto nerovnosť, dobrá stratégia zvykne byť presunúť si dĺžky, ktoré v nej vystupujú, niekam k sebe, najlepšie pozdĺž jednej priamky, nech ich vieme ľahko porovnať. To presne urobíme, akurát si najprv v mysli vydeľme celú nerovnosť dvomi. Chceme teda niekde vhodne pokope nájsť $|CS|$, $|BD|/2$ a $|DA|/2$. Nechajme CS na mieste a pozrime sa na zvyšné dve dĺžky.



Označme E stred úsečky BD. Všimnime si, že ES je strednou priečkou ABD preto

$$|ES| = |DA|/2.$$

Ďalej z toho, že pri C je pravý uhol, musia body BCD ležať na Tálesovej kružnici so stredom v bode E, takže

$$|CE| = |BE| = |BD|/2.$$

Z trojuholníkovej nerovnosti pre SCE (môže byť aj degenerovaný – t.j. bod E môže ležať na SC, preto neostrá nerovnosť) máme

$$|SC| \leq |ES| + |CE|.$$

Vynásobením tejto nerovnosti dvomi a dosadením predošlých vzťahov dostávame

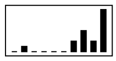
$$2|SC| \leq 2|ES| + 2|CE| = |DA| + |BD|,$$

čo sme mali ukázať. Rovnosť nastáva, len ak je SCE degenerovaný, teda ak E leží na SC.

Komentár: Úloha bola dosť priamočiara. V zadaní boli dve klasické podmienky – stred strany a pravý uhol. A obidve stačilo veľmi štandardne využiť – stredná priečka, Tálesova kružnica. Možno netradične vyzerala neostrá nerovnosť v zadaní, ale nakoniec sa ukázalo, že to bola len zamaskovaná trojuholníková nerovnosť.

3. Opravovali: Matúš Hlaváčik, Dano Onduš

Počet riešiteľov: 17



Robčo a Peťo hrajú hru s gorodkami. Začína Robčo a v ťahoch sa striedajú, pričom každý vo svojom ťahu zvýši veľkosť gorodiek (označme n) o vlastného deliteľa n (deliteľa menšieho ako n). Na začiatku majú dvojdielne gorodky ($n = 2$). Vyhráva ten, kto prvý zvýši n na hodnotu väčšiu alebo rovnú ako 2016. Obaja hrajú najlepšie ako sa dá. Kto vyhrá?

Riešenie:

Hoci to od nás zadanie nevyžaduje, ak nájdeme víťaznú stratégiu, vieme určiť, kto vyhrá. Najprv určíme najmenšie možné číslo, z ktorého vieme vyhrať. Najväčším vlastným deliteľom prirodzeného čísla je jeho polovica. To však platí iba pre párne čísla. Najväčším deliteľom nepárneho čísla môže byť najviac jeho tretina. Preto najmenším párnym číslom, z ktorého vieme vyhrať, je 1344 a najmenším nepárnym je 1515.

Každé párne zložené číslo má aspoň jedného párneho (2) a jedného nepárneho (1) deliteľa. Preto, ak začíname na párnom počte, vieme súpera poslať aj na párny, aj na nepárny počet gorodiek. Nepárne čísla majú iba nepárnych deliteľov. Preto, ak začíname na nepárnom počte, po našom ťahu bude párny počet gorodiek.

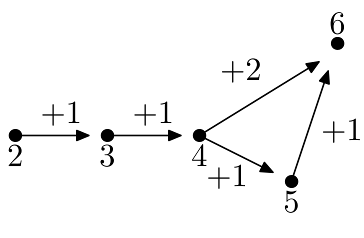
Stratégia pre Robča je jednoduchá. Začína na párnom čísle a vždy pridá 1 gorodku. Peťo sa preto ocitne na nepárnom čísle, z ktorého bude musieť Robča poslať na párne číslo. Ak sa Robčo ocitne na párnom čísle väčšom alebo rovnom 1344, hru svojím ťahom vyhrá. Na to, aby vyhral Peťo, by muselo byť pred Robčovým ťahom aspoň 1514 gorodiek (keďže Robčo vždy pridá iba jednu). Z tohoto počtu však už Robčo vie vyhrať.

Iné riešenie:

Uvedomme si, že v každom ťahu sa k n pripočíta vždy aspoň 1, teda raz to určite musí dosiahnuť 2016. To znamená, že hra je konečná a nepripúšťa remízu (niekto musí vyhrať). Pre takéto hry platí, že každú pozíciu v hre (v našom prípade počet gorodiek na začiatku môjho ťahu) môžeme nazvať buď vyhrávajúcou alebo prehrávajúcou.

Zamyslime sa prečo, je to tak. Evidentne platí, že ak súper zväčší číslo na aspoň 2016, tak to je pre mňa prehrávajúca pozícia. Všetky pozície, z ktorých sa viem dostať na prehrávajúce (donútim súpera prehrať), sú vyhrávajúce. Následne všetky, z ktorých sa viem dostať len na vyhrávajúce pozície (nedokážem súpera donútiť prehrať) sú prehrávajúce. A keďže platí to, čo sme spomenuli v prvom odseku tohto riešenia, tak vieme, že pre každé číslo v hre vieme postupne určiť, či je pre mňa vyhrávajúce alebo prehrávajúce.

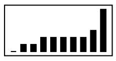
Teraz si rozoberme, ako bude vyzerať prvých pár ťahov. Robčo má najprv jedinú možnosť, pripočítať 1, a po jeho ťahu zostávajú 3 gorodky. Peťo teraz môže zas pričítať len 1. Robčo má možnosť ku 4 gorodkám pripočítať buď 2 a Peťo teda bude začínať s číslom 6 alebo môže pripočítať 1. Vtedy Peťo môže pripočítať zase raz len 1 a s číslom 6 bude začínať Robčo. Vidíme, že Robčo vie rozhodnúť o tom, kto dostane číslo 6. Keďže sme si ukázali, že každá pozícia je buď vyhrávajúca alebo prehrávajúca, tak Robčo rozhoduje o tom, kto vyhrá. To znamená, že vyhráva Robčo.



Komentár: Väčšina z vás to mala dobre, niektorí nedotiahli nejaké detaily, ale inak tu nie je nič, čo by sme vám mohli vyčítať.

4.

Opravovali: Janka Baranová, Kristín Mišlanová
Počet riešiteľov: 21



Vyriešte nasledujúcu rovnicu v celých číslach (svoje riešenie odôvodnite):

$$x_1{}^4 + \cdots + x_{14}{}^4 = 2015.$$

Riešenie:

Vzhľadom k tomu, že štvrtá mocnina je vždy kladné číslo, tak pre každý člen nášho súčtu platí: $0 \leq x_i^4 \leq 2015$.

Z toho vidíme, že za každé x_i môžeme dosádzať celé čísla z intervalu $\langle -6; 6 \rangle$, pričom ich štvrté mocniny potom nadobúdajú hodnoty 0, 1, 16, 81, 256, 625, 1296.

Následne, keď sa pozrieme na zvyšky týchto siedmich štvrtých mocnín po delení 16 (voľba čísla 16 je logická, keďže pri kvadratických členoch skúmame často zvyšky po delení 4, pri štvrtých mocninách sa oplatí pozerať na deliteľnosť 16), zistíme, že v prípade párnych čísel sú rovné 0 a pri nepárnych 1.

Tento fakt si vieme dokázať aj vo všeobecnosti. Rozdelíme si prípady, keď je základom mocniny párne číslo ($2k$) a nepárne číslo ($2k + 1$) pričom $k \in \mathbb{Z}$.

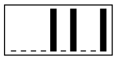
- párne číslo: $(2k)^4 = 16k^4 \rightarrow$ deliteľné 16, čiže zvyšok 0
- nepárne číslo: $(2k+1)^4 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k + 1 = 16(k^4 + 2k^3 + k^2) + 8k(k+1) + 1 \rightarrow$ výraz $16(k^4 + 2k^3 + k^2)$ je deliteľný 16, výraz $8k(k+1)$ taktiež, pretože jedno z čísel k a $k+1$ je určite párne, čiže celá štvrtá mocnina nepárneho čísla dáva po delení 16 zvyšok 1

Číslo 2015 dáva po delení 16 zvyšok 15. Každý zo 14 členov na ľavej strane rovnice však dáva po delení 16 maximálne zvyšok 1 (spolu maximálne 14), čiže pomocou nich nikdy nevieme dosiahnuť zvyšok 15, a teda daná rovnica nemá riešenie v obore celých čísel.

Komentár: Všetci tí, ktorí sa ubrali rovnakou cestou, ako je vo vzorovom riešení, úlohu úspešne vyriešili. Najčastejšou chybičkou bolo zabúdanie na záporné čísla, ktoré ste vo svojich riešeniach občas ani nespomenuli. Naopak, cesta skúšania vás väčšinu stála pár bodov, pretože pri takomto riešení je nutne systematicky popísať a prejsť všetky možnosti, čo sa vám nie vždy podarilo (a ak aj áno, tak ste nás nepresvedčili o tom, že sú naozaj všetky).

5.

Opravovali: Peťo Kovács, Rišo Trembecký
Počet riešiteľov: 3



Ukážte, že pre každé prvočíslo p existujú prirodzené čísla a, b také, že $a^2 + b^2 + 1$ je deliteľné p.

Riešenie:

Na úvod môžeme overiť, že číslo 2 sa dá zapísať ako $1^2 + 0^2 + 1$. Ďalej budeme úlohu riešiť pre nepárne prvočísla. Pozrime sa, koľko má p kvadratických zvyškov. Kvadratický zvyšok dostaneme tak, že umocníme zvyšok po delení p na druhú a vezmeme zvyšok tohto čísla po delení p (pozn.: Naša "definícia" úplne nesúhlasí s tou poriadnou, je len pre účely vzoráku. Správne by sa 0 nemala rátať.). Zvyškov po delení p je p, sú to $0, 1, \ldots, p-1$. Koľko je teda tých kvadratických? Musíme zistiť, kedy dva rôzne zvyšky po delení p umocnené na druhú budú dávať rovnaký zvyšok po delení p. Vezmime dva také zvyšky x a y.

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv y^2 \pmod p \\ x^2 - y^2 &\equiv 0 \pmod p \\ (x+y)(x-y) &\equiv 0 \pmod p \end{aligned}$$

pozn.: Znak $\equiv$ znamená *je kongruentné s*, teda *má rovnaký zvyšok ako* (po delení p).

Máme teda 3 možnosti, kedy bude kongruencia platiť:

- $(x + y)$ má zvyšok 0 po delení p.
- $(x - y)$ má zvyšok 0 po delení p, to však nemôže nastať, lebo x a y sú rôzne.
- Jednotlivé zátvorky nie sú deliteľné p, ale ich súčin je. To je však spor s tým, že p je prvočíslo.

Z prvej možnosti teda dostávame nutnú podmienku, že $x + y = p$. Z toho vyplýva, že každý zvyšok x (okrem 0) má medzi zvyškami svoju jedinú dvojicu $p - x$ (0 by mala dvojicu p, ktorá už medzi zvyšky nepatrí). Zvyškov bez 0 je $p - 1$, čo je párny počet, tak dostávame $(p - 1)/2$ dvojíc zvyškov, ktoré umocnené na druhú dávajú rovnaký zvyšok po delení p, teda

$(p-1)/2$ zvyškov z našej sady p zvyškov môžeme škrtnúť (jeden z každej dvojice). Zostalo nám $p-(p-1)/2 = (p+1)/2$ zvyškov po delení p, z ktorých každému zodpovedá iný kvadratický zvyšok.

OK, vráťme sa k zadaniu a zostavme kongruenciu.

$$\begin{aligned} a^2+b^2+1 &\equiv 0 \pmod p \\ a^2+b^2 &\equiv -1 \pmod p \\ a^2+b^2 &\equiv p-1 \pmod p \end{aligned}$$

Pozrime sa, koľko existuje spôsobov, ako dostať $p-1$ súčtom dvoch zvyškov po delení p.

$$0+(p-1), 1+(p-2), \ldots, \frac{p-3}{2}+\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2}+\frac{p-1}{2}$$

Jednoducho spočítame, že ich je $(p+1)/2$. Dôležité je si uvedomiť, že v týchto súčtoch sa nachádzajú všetky možné zvyšky po delení p. Chceme dokázať, že v jednom zo súčtov sú oba sčítance kvadratickými zvyškami p.

Z Dirichletovho princípu vyplýva, že ak máme $(p+1)/2$ kvadratických zvyškov a $(p+1)/2$ súčtov, buď sú v aspoň jednom súčte oba sčítance kvadratickými zvyškami p (o čo nám ide), alebo v každom súčte jeden. Posledný súčet je ale súčtom dvakrát toho istého zvyšku. Ak je teda tento kvadratickým zvyškom p, tak vieme nájsť $a=b$, kde $a^2=b^2\equiv(p-1)/2 \pmod p$.

Komentár: Riešitelia, ktorí sa do úlohy pustili, mali dobré myšlienky, ktoré dospeli k správnemu záveru. Avšak v riešeniach sa občas vyskytli tvrdenia, ktoré neboli vôbec, alebo aspoň dostatočne dokázané.

6. **Opravovali: Henka Micheľová, Maťo Vodička**

Počet riešiteľov: 6

Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD ($|AB| > |CD|$). Body K a L ležia na úsečkách AB a CD tak, že $|AK| : |KB| = |DL| : |LC|$. Predpokladajme, že existujú body P a Q na úsečke KL, pre ktoré platí

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BCD| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle CQD| = |\sphericalangle ABC|.$$

Dokážte, že body P, Q, B, C ležia na jednej kružnici.

Riešenie:

Označme si O priesečník priamok AD a BC. Keďže úsečky DC a AB sú rovnobežné, tak sú rovnoľahlé so stredom rovnoľahlosti O. V tejto rovnoľahlosti sa L zobrazí na bod, ktorý delí úsečku AB v pomere $|DL| : |LC|$. Avšak to je zo zadania bod K. Preto body K, L, O ležia na jednej priamke.

Označme X obraz bodu Q v tejto rovnoľahlosti. Ten samozrejme leží na priamke KL, lebo tam ležia aj O, P, Q.

Trojuholníky CDQ a BAX sú z rovnoľahlosti podobné, a preto vieme, že vieme, že $|\sphericalangle CQD| = |\sphericalangle AXB|$. Vezmime si štvoruholník $AXBP$. Oproti uhlu $\sphericalangle AXB$ sa nachádza uhol $\sphericalangle APB$. My však vieme, že $|\sphericalangle AXB|+|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle ABC|+$ $+|\sphericalangle BCD| = 180°$, keďže $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ sú vnútorné uhly v lichobežníku $ABCD$ pri ramene BC, a teda ich súčet je 180°. Tým sme dokázali, že štvoruholník $AXBP$ je tetivový.

Vieme, že platí $|\sphericalangle ABX| = |\sphericalangle DCQ|$ (z podobnosti trojuholníkov CDQ a BAX). Keďže $AXBP$ je tetivový, tak obvodový uhol k uhlu $\sphericalangle ABX$ je uhol $\sphericalangle APX$, a teda $|\sphericalangle APX| = |\sphericalangle DCQ|$. Preto platí

$$|\sphericalangle XPB| = |\sphericalangle APB| - |\sphericalangle APX| = |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle DCQ| = |\sphericalangle QCB|.$$

Ak je bod Q bližšie k bodu K ako bod P, tak potom rovnako veľké uhly $\sphericalangle XPB$ a $\sphericalangle QCB$ sú obvodové nad tetivou BQ. V opačnom prípade dostávame, že súčet protiľahlých uhlov štvoruholníka $BCQP$ je 180°. V oboch prípadoch sme dokázali, že body P, Q, B, C ležia na jednej kružnici (a to aj v prípade, ktorý sme akosi zamlčali – keď $P=Q$, vtedy je riešenie triviálne).

Komentár: Túto úlohu sa nerozhodlo riešiť veľa z vás. Tí, ktorí sa o to pokúsili, sa takmer všetci dopracovali k správnemu riešeniu. Nezabúdajte však rozobrať všetky možnosti rozloženia bodov zo zadania (poloha bodov P a Q). Pre tých, ktorí ste sa o riešenie len pokúšali, tak nezabúdajte, že zadanie vám nemusí povedať o všetkých bodoch, ktoré pri riešení potrebujete (v našom riešení to boli body O a X).

Zadania úloh letného semestra 40. ročníka

Ak náš seminár riešiš prvýkrát, nezabudni si vytvoriť a vyplniť profil na našej stránke
https://seminar.strom.sk

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **2. 5. 2016**

1. Máme kružnicu k a bod X mimo nej. Nech XY a XZ sú dotyčnice ku kružnici k, pričom body Y a Z sú body dotyku. Dokážte, že stred kružnice vpísanej do trojuholníka XYZ leží na kružnici k.

2. Dokážte, že ak p, q, r sú racionálne čísla a platí $p^2+q^2+r^2+2=(p+q+r)^2$, potom $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)$ je druhou mocninou racionálneho čísla.

3. Určte počet podmnožín množiny $\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 50\}$, ktorej súčet prvkov je väčší alebo rovný ako 638.

4. Nech pre reálne čísla $x,\ y,\ z>0$ platí

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1,$$

dokážte, že $(x-1)(y-1)(z-1)\geq 8$.

5. Nájdite najmenšie prirodzené číslo t, pre ktoré existujú celé čísla $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_t$ také, pre ktoré platí

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_t^3=2002^{2002}.$$

6. Máme tri obrovské krčahy, v každom z nich je kladný celočíselný počet litrov vody. Dovolené je doliať do ľubovoľného krčahu rovnaké množstvo vody, aké v ňom práve je, z krčahu, ktorý obsahuje dostatočné množstvo vody. Dokážte, že pomocou takéhoto prelievania je vždy možné úplne vyprázdniť niektorý krčah.

Poradie po 1. sérii Letného semestra 40. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Laura Vištanová	S3	GMaraKE	9	9	9	9	9	9	0	54
2.	Martin Števko	S1	GAlejKE	9	9	7	-	6	9	0	49
3.	Samuel Krajči	S1	GAlejKE	9	9	9	3	-	8	0	47
4.	Jozef Lipták	S3	GJgtBB	9	9	8	7	-	9	0	42
5. - 6.	Matej Hanus	Z9	ZKro4KE	9	-	9	9	-	-	0	36
	Michal Masrna	Z9	ZKro4KE	9	-	9	9	-	-	0	36
7.	Viktória Brezinová	S1	GAlejKE	7	-	9	9	-	-	0	34
8.	Patrik Paľovčík	Z9	ZKro4KE	5	-	9	9	-	-	0	32
9.	Róbert Sabovčík	Z9	ZKro4KE	6	-	8	8	-	-	0	30
10.	Erik Berta	S1	GAlejKE	9	-	7	4	-	-	0	29
11.	Vratislav Madáč	S1	GAlejKE	8	-	7	4	-	-	0	27
12.	Martin Masrna	S2	GPostKE	9	-	9	8	-	-	0	26
13.	Tomáš Chovančák	Z9	ZKro4KE	-	-	7	9	-	-	0	25
14.	Norbert Micheľ	Z8	ZKro4KE	2	5	-	6	4	-	0	23
15. - 16.	Marek Koman	S2	GAlejKE	9	-	-	3	-	9	0	21
	Ľubica Hladká	S3	GJgtBB	9	-	6	6	-	-	0	21
17. - 18.	Jakub Mach	S3	GPostKE	9	-	9	1	-	-	0	19
	Adam Dobrovič	S3	GJgtBB	8	-	6	5	-	-	0	19
19. - 22.	Juraj Mičko	S3	GPostKE	9	9	-	-	-	-	0	18
	Filip Csonka	S1	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	0	18
	Martin Mihálik	S1	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	0	18
	Martin Mičko	S1	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	0	18
23.	Leonard Turčan	S3	GJgtBB	8	-	1	7	-	-	0	16
24.	Martin Šalagovič	S1	GAlejKE	6	-	-	-	-	-	0	12
25.	Jonáš Suvák	S1	GJarPO	-	0	-	5	-	0	0	10
26.	Michaela Dlugošová	S2	GKukuPO	9	-	-	-	-	-	0	9
27. - 28.	Kristína Bratková	S3	EGJAK	6	-	-	2	-	-	0	8
	Juraj Jankovich	S3	GJgtBB	-	-	-	8	-	-	0	8
29.	Jakub Genči	S3	GPostKE	7	-	-	-	-	-	0	7
30.	Michaela Borošová	S1	GPostKE	0	0	-	-	-	-	0	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

Názov STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2016 • Letný semester 40. ročníka (2015/2016)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `https://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`