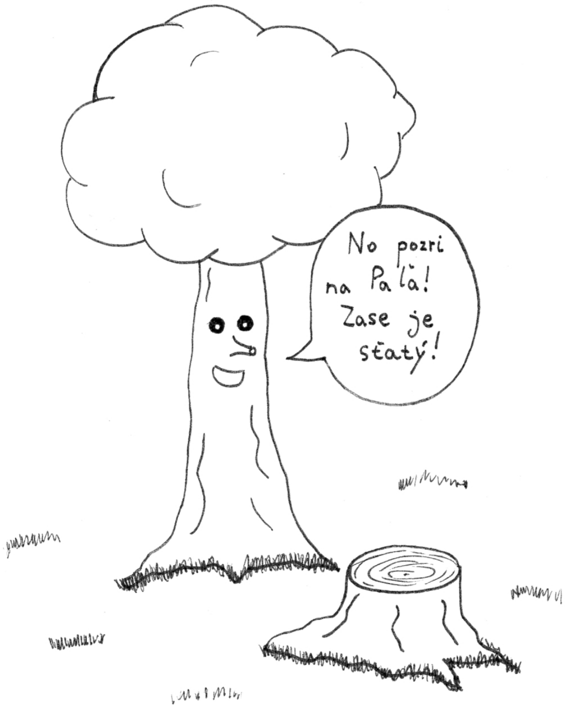
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Jedlo zadarmo...

...pre každého, kto získal aspoň 108 bodov.
Jeden by nepovedal ako rýchlo zbehne ten čas pri riešení, ale aj opravovaní **STROM**u. Ani sme sa nenazdali, a kým sme stihli dočítať vaše posledné riešenie, vonku sa krásne vyčasilo a oteplilo. Určite už aj vy nedočkavo čakáte, kedy skončí školský rok a vymeníte učebne za kúpaliská alebo za návštevu prírody. My sa už tiež nevieme dočkať, ale ešte viac sa tešíme ako najlepších z Vás v septembri uvidíme na sústredení, ktoré bude za neuveriteľnú cenu 0 €. Šokantné, čo? Nakoniec vám želáme veľa zdaru pri ukončovaní školského roka a krásne leto plné zážitkov.

vaši **STROM**isti



Sústredenie

Už vám chýbame a neviete sa nás dočkať? Tak mám pre vás dve správy: tá horšia je, že to bez nás budete musieť ešte pár mesiacov prežiť. Avšak, tá lepšia znie, že v septembri sa nakoniec predsa len dočkáte. Ďalšie dôležité infošky sa dozviete snáď čoskoro, no aby ste zatiaľ aspoň vedeli kedy si pre nás máte v kalendáriku vyhradiť váš drahocenný čas, tak vedzte, že jeden z najlepších týždňov v roku sa bude konať 24. - 29. septembra v Danišovciach. My sa na vás tešíme už teraz (:

1.

Opravovali: Žanetka Semanišinová, Kristín Mišlanová
Počet riešiteľov: 55

Dokážte, že ak p, q sú kladné celé čísla čísla, tak kladným celým číslom je aj

$$\frac{10^{p+q} + 2 \cdot 10^q + 2 \cdot 10^p + 4}{36}.$$

Riešenie:

Na to, aby bol daný výraz kladným celým číslom, stačí ak čitateľ zlomku bude deliteľný 36, lebo je to podiel kladných celých čísel.

Platí, že $36 = 4 \cdot 9$. Keďže 4 a 9 sú nesúdeliteľné, stačí ukázať, že čitateľ je deliteľný 4 aj 9 súčasne. Za týmto účelom si všimneme, ako budú vyzerať jeho cifry. Prvý člen je číslo v tvare 1 a za ňou $p + q$ núl, druhý je v tvare 2 a za ňou q núl, tretí v tvare 2 a za ňou p núl a posledný je iba 4 na mieste jednotiek.

Vieme, že $p > 1$ a $q > 1$, preto tiež $p + q > p$ a $p + q > q$. Všetky členy okrem posledného majú preto na poslednom mieste 0, preto cifra na mieste jednotiek je 4. Keďže 10^{p+q} je vyššieho rádu než zvyšné členy, cifra na $(p + 1)$. pozícii od konca závisí len na druhom a treťom člene. Ak $p \neq q$, tak je táto cifra 2 a rovnako aj cifra na $(q + 1)$. pozícii. Ak $p = q$, tak je táto cifra (rovnaká pre p aj q) rovná 4. Posledná nenulová cifra pochádza z prvého člena a tá je rovná 1. Všetky ostatné cifry v čitateli sú rovné 0. Čitateľ je potom pre $p \neq q$ tvaru 10...020...020...04 a pre $p = q$ 10...040...04 (kde ... značí nejaký počet núl, môže byť aj nulový).

Z tohto tvaru už ľahko rozhodneme o deliteľnosti. Čitateľ je deliteľný 4, ak je jeho posledné dvojčíslie deliteľné 4. Vieme, že jeho posledné dvojčíslie je 04, 24 alebo 44, takže táto podmienka je splnená. Taktiež číslo je deliteľné 9, ak je jeho ciferný súčet deliteľný 9. Ciferný súčet čitateľa je (v oboch prípadoch) 9, takže vieme povedať, že celý výraz je deliteľný 4 a 9 súčasne, čo sme chceli ukázať.

Iné riešenie:
Výraz si trošku upravíme:

$$\frac{10^{p+q}+2\cdot 10^q+2\cdot 10^p+4}{36}=\frac{(10^p+2)(10^q+2)}{36}=\frac{(10^p+2)}{6}\cdot\frac{(10^q+2)}{6}$$

Na to, aby bol daný výraz kladným celým číslom nám stačí ukázať, že oba zlomky budú kladnými celými číslami, čo je ekvivalentné s tým, že každý z čitateľov bude deliteľný 6 (keďže je zrejmé, že čitatele budú celočíselné a kladné).

Aby sme dokázali deliteľnosť 6, tak sa postupne pozrieme na deliteľnosť 2 a 3 (rozoberieme prvý z čitateľov, druhý funguje analogicky):

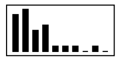
- deliteľnosť 2: člen $10^p = 2^p \cdot 5^p$ a keďže $p \geq 1$, tak je to deliteľné 2, čo sa následne po pričítaní 2 pravdaže nezmení
- deliteľnosť 3: člen 10^p dáva po delení 3 vždy zvyšok 1, čo po pričítaní 2 dá dokopy zvyšok 3, a teda deliteľnosť 3

Oba zlomky sú teda kladné celé čísla, a preto je kladným celým číslom aj pôvodný výraz.

Komentár: Úloha pre vás nebola ťažká, o čom svedčia aj vysoké počty bodov. Mnohí z vás, ale stratili body za argumenty, ktoré síce v tejto úlohe zrejme fungujú, ale vo všeobecnosti neplatia. Typickým príkladom je prehlásenie o tom, že ciferný súčet súčtu nejakých čísel je súčtom ich ciferných súčtov. To platí zriedkakedy, môžeme to použiť, len ak si rozmyslíme ako v skutočnosti výsledné číslo vyzerá (čo sme urobili vo vzorovom riešení). A na záver, netreba zabúdať, že to, že sú dve čísla označené rôzne, neznamená, že sa nemôžu rovnať.

2. Opravovali: Matúš Hlaváčik, Peťo Kovács

Počet riešiteľov: 28

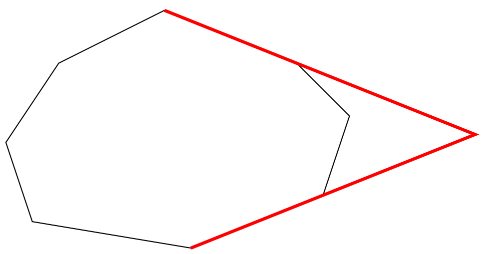


Dokážte, že v ľubovoľnom konvexnom mnohouholníku (okrem rovnobežníka) možno vybrať tri strany tak, aby priamky nimi určené tvorili trojuholník, v ktorom je daný mnohouholník obsiahnutý.

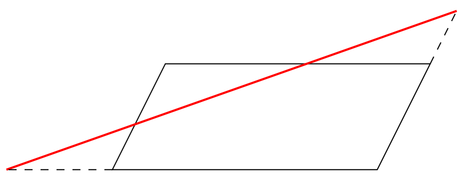
Riešenie:

Na začiatku si všimnime, že pre trojuholník platí úloha triviálne. Teraz sa pozrime na mnohouholníky s viacerými stranami.

Spravme si malé pozorovanie. V mnohouholníku, ktorý má viac ako 5 strán, vieme vždy nájsť dvojicu nesusedných strán, ktoré sú rôznobežné. Z konvexity vyplýva, že ku každej strane v mnohouholníku, môže existovať najviac jedna s ňou rovnobežná. Taktiež je dobré si všimnúť, že dvojica rovnobežných strán spolu nemôže susediť, inak by splynuli do jednej strany. Pre každú stranu v n-uholníku existuje $n-3$ s ňou nesusedných strán. V našom prípade teda aspoň 2. Medzi týmito stranami už teda vieme nájsť aspoň jednu, ktorá nebola rovnobežná so zvolenou stranou.



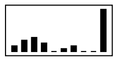
Teraz už vieme, že pre 5- a viac uholník existuje dvojica nesusedných a nerovnobežných strán. Táto dvojica sa pretne a my môžeme odstrániť všetky strany, ktoré nahradila (viď obrázok). Takto sme dostali mnohouholník s menej stranami. Tento postup v každom kroku odmaže aspoň jednu (tú susednú) stranu a teda po konečnom počte krokov dostaneme štvoruholník. Buď sme dostali rovnobežník a tento prípad vyriešime v ďalšom odseku. Ak sme dostali niečo iné, tak vezmeme tri strany, také, že žiadne dve z nich nie sú rovnobežné. To vieme spraviť, keďže to nie je rovnobežník. Buď tvoria trojuholník, ktorý obsahuje štvoruholník a sme hotoví, alebo sa pretínajú tak, že trojuholník, ktorý tvoria neobsahuje rovnobežník. V takom prípade stačí zvoliť namiesto strednej strany tú, ktorú sme nevybrali.



Ak sme týmto postupom dostali rovnobežník, tak vieme, že pôvodný mnohouholník bol aspoň 5-uholník, keďže rovnobežník zadanie zakazuje. Preto existovala nejaká strana, ktorú sme mohli vďaka niektorým dvom súčasným stranám vypustiť. Táto strana sa pôvodne nachádzala medzi týmito dvoma stranami. Potom namiesto tých dvoch strán, vezmeme tú, ktorú nahradili. Tá nie je rovnobežná ani s jednou so zvyšných dvoch, keďže je rôznobežná s ich rovnobežkami. Dostávame trojuholník, ktorý vďaka tejto strane určite obsahuje celý pôvodný mnohouholník.

Komentár: Väčšina z vás si vybrala nejaký spôsob, ako bude vyberať v mnohouholníku hrany a následne prehlásila, že takto vybrané hrany vždy vytvoria hľadaný trojuholník. Bohužiaľ ste sa nad tým nezamysleli dostatočne a neskúsili na svoj spôsob nájsť protipríklad. Často vám potom totižto stačilo ešte vyriešiť zopár extrémnych prípadov, na ktorých váš postup nefungoval. Naproti tomu musíme pochváliť Timku Szöllősovú, ktorá ako jediná svoje riešenie dotiahla do konca.

3. Opravovala: Janka Baranová
Počet riešiteľov: 32



V každom vrchole štvorca máme 1 kamienok a v každom kroku môžeme previesť nasledujúcu operáciu: z ľubovoľného vrcholu zoberieme niekoľko kamienkov (najviac toľko, koľko ich tam je) a pridáme dvakrát viac kamienkov na niektorý zo susedných vrcholov. Je to možné robiť tak, aby sme na konci vo vrcholoch dostali (zaradom po obvode) 2016, 2015, 2017 a 2016 kamienkov?

Riešenie:

Pozerajme sa na súčet kamienkov v protiľahlých vrcholoch štvorca. Prečo? Keďže kamienky nevieme presúvať do protiľahlých vrcholov, ale len do susedných, tak pri každom presune sa nám z jedného súčtu kamienky odoberú a k druhému pridajú.

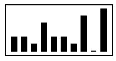
Konkrétne z jedného vrcholu odoberieme x kamienkov, teda prvý súčet sa zníži o x a pridáme do druhého vrcholu $2x$, teda druhý súčet zväčšíme o $2x$. Pri každom presune x kamienkov sa teda rozdiel medzi našimi dvoma súčtami (po uhlopriečkach štvorca) zmení o $3x$, čiže o násobok 3.

Na začiatku máme oba súčty rovné 2, teda ich rozdiel je rovný 0 - násobok 3. Keďže ten sa mení (rastie alebo klesá) vždy len o nejaký násobok 3, tak ostane stále len násobkom 3. Na konci však máme dosiahnuť rozdiel našich súčtov 2 (rozdiel $2016 + 2017 = 4033$ a $2016 + 2015 = 4031$), čo teda nie je možné dosiahnuť násobkami 3.

Na konci nevieme dosiahnuť 2016, 2015, 2017 a 2016 kamienkov na obvode štvorca.

Komentár: V tejto úlohe sa vám darilo celkom dobre. Chcela by som vypichnúť len dve veci. Vy, čo ste prišli na fintu s deliteľnosťou 3 a nemáte 9 bodov, nezúfajte a nabudúce sa pokúste svoje myšlienky lepšie spísať a odôvodniť. A zase vy, ktorých body sa pohybujú blízko spodnej hranice nabudúce poriadne aj viac krát prečítajte zadanie ;) − bolo možné presúvať kamienky len do susedného vrcholu štvorca, tak pozor na to. Inak super, som na vás pyšná.

4. Opravoval: Dano Onduš
Počet riešiteľov: 25



Nájdite všetky kladné celé čísla n, ktoré sa nedajú zapísať v tvare $n = [a, b] + [b, c] + [c, a]$, pričom a, b, c môžu byť ľubovoľné kladné celé čísla. Pozn: $[a, b]$ označuje najmenší spoločný násobok čísel a, b.

Riešenie:

Najprv ukážeme, že vieme zapísať každé nepárne číslo okrem 1. Každé nepárne číslo väčšie ako 1 sa dá zapísať ako $2n+1$, kde n je prirodzené číslo. Teda zvoľme $a = n$, $b = 1$, $c = 1$. Vidíme, že súčet najmenších spoločných násobkov je $n+1+n = 2n+1$, ako sme chceli. Preto pre hocijaké nepárne číslo väčšie ako 1 vieme nájsť vhodné a, b, c.

Teraz ukážeme, že ak vieme nejaké číslo zapísať, vieme zapísať aj hocijaký jeho násobok. Označíme najväčší spoločný deliteľ čísel a, b ako $NSD(a, b)$. Vieme, že $[a, b] = \frac{a\cdot b}{NSD(a,b)}$. Keďže $NSD(ka, kb) = k \cdot NSD(a, b)$, tak $[ka, kb] = \frac{ka\cdot kb}{k\cdot NSD(a,b)}$, z čoho už vidíme, že $[ka, kb] = k[a, b]$. Preto ak $n = [a, b] + [b, c] + [c, a]$, tak $kn = [ka, kb] + [kb, kc] + [kc, ka]$, čiže vieme dostať ľubovoľný násobok čísla, ktoré už zapísať vieme.

Zatiaľ sme ukázali, že vieme zapísať všetky nepárne čísla a ich ľubovoľný násobok. To sú všetky čísla, ktoré majú v prvočíselnom rozklade aspoň jedno nepárne prvočíslo. Zostali nám mocniny dvojky, ktoré, ako ukážeme, zapísať nevieme.

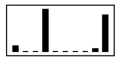
Jednotku zapísať nevieme, tak predpokladajme, že vieme zapísať nejakú inú mocninu dvojky. Ak je súčtom troch prirodzených čísel, tak buď sú všetky párne, alebo je jedno párne a dve nepárne. Ak by boli dva z najmenších spoločných násobkov troch čísel nepárne, musí byť aj ten posledný, preto sú všetky tri násobky párne. To sa môže stať, iba ak sú aspoň dve z čísel a, b, c párne. Ak by bolo jedno z nich, napríklad a, nepárne, tak ani po jeho vynásobení dvoma sa spoločné násobky týchto čísel nezmenia. $[b, c]$ sa nezmení a $[a, b]$ a $[c, a]$ už párne boli, preto ich jediná dvojka v prvočíselnom rozklade $2a$ nezmení. Preto ak sa dá mocnina dvojky zapísať ako súčet násobkov podľa zadania, tak sa dá zapísať aj ak a, b, c sú párne.

V takom prípade si ich môžeme zapísať ako $2a$, $2b$, $2c$ a $2^p = [2a, 2b] + [2b, 2c] + [2c, 2a]$. Podľa toho, čo už vieme, $2^{p-1} = [a, b] + [b, c] + [c, a]$, teda určite vieme zapísať aj menšiu mocninu dvojky ako súčet troch násobkov. Z toho by však indukciou vyplývalo, že by sme vedeli aj číslo 2 zapísať ako súčet troch násobkov. Každý z násobkov je však aspoň 1, teda ich súčet je najmenej 3, čo je spor.

Ukázali sme, že vieme zapísať všetky čísla, okrem mocnín dvojky.

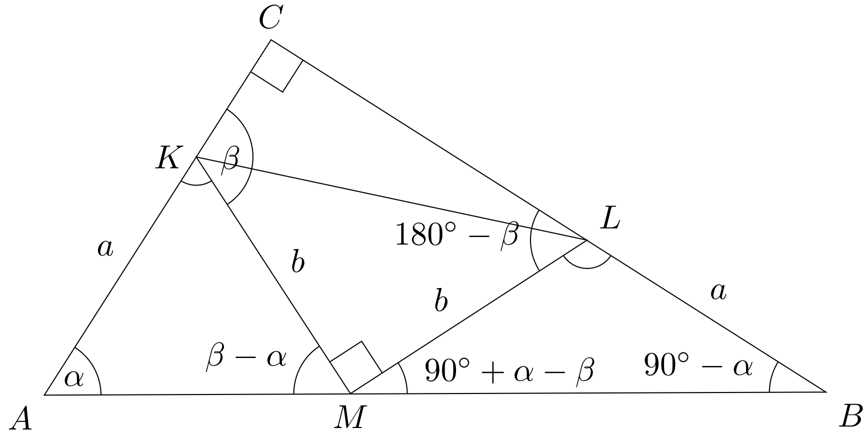
Komentár: Na výsledok sa dalo prísť pomerne jednoducho. Väčšine z vás sa podarilo ukázať, prečo vieme zapísať hocijaké číslo, ktoré má nepárneho deliteľa. Správne zdôvodnenie toho, že mocniny dvojky nevyhovujú, ako vidno aj zo vzorového riešenia, nebolo úplne jednoduché. Kľúčové bolo ukázať, že ak vieme zapísať nejakú mocninu, tak vieme zapísať aj mocninu o jedna menšiu, čo vedie k sporu.

5. **Opravoval: Roman Staňo**
Počet riešiteľov: 31

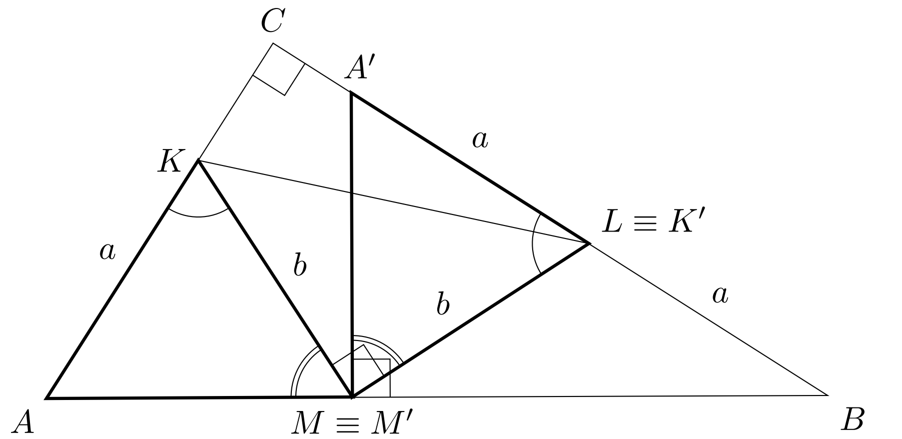


Na odvesnách AC a BC pravouhlého trojuholníka ABC sú zvolené postupne body K a L a na prepone bod M tak, že platí $|AK| = |BL| = a$, $|KM| = |LM| = b$ a uhol KML je pravý. Dokážte, že $a = b$.

Riešenie:

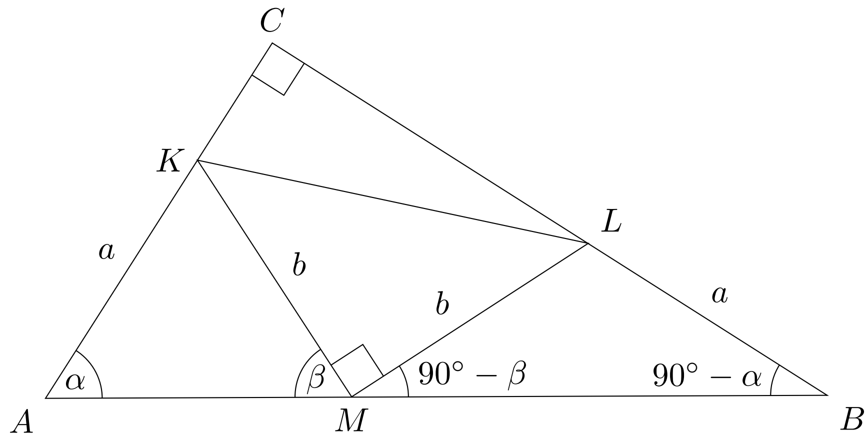


Označme $|\sphericalangle CAB| = \alpha, |\sphericalangle CKM| = \beta$. Keďže súčet vnútorných uhlov ABC je $180°$, $KMLC$ je $360°$ a zo zadania $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KML| = 90°$, tak $|\sphericalangle ABC| = 90° - \alpha$ a $|\sphericalangle CLM| = 180° - \beta$. Ďalej vyjadrime veľkosti uhlov $|\sphericalangle AKM| = 180° - \beta$ a $|\sphericalangle MLB| = \beta$ ako doplnky už známych uhlov do priamych uhlov. Nakoniec ešte vyjadrime veľkosti $|\sphericalangle KMA| = \beta - \alpha$ a $|\sphericalangle BML| = 90° + \alpha - \beta$ ako doplnky už známych uhlov do súčtu $180°$ vrámci trojuholníkov AKM a BLM. Zobrazme trojuholník AMK rotáciou okolo bodu M o uhol $90°$ v zápornom smere (smere pohybu hodinových ručičiek) na $A'M'K'$.



Vidno, že teraz $M \equiv M'$ a $L \equiv K'$. Všimnime si, že $|\sphericalangle A'LB| = |\sphericalangle BLM| + |\sphericalangle A'K'M'| = |\sphericalangle BLM| + |\sphericalangle AKM| = \beta + (180° - \beta) = 180°$, čo je priamy uhol a body A', B a L preto ležia na priamke. Uvedomme si tiež, že $|\sphericalangle A'MB| = |\sphericalangle BML| + |\sphericalangle A'M'K'| = |\sphericalangle BML| + |\sphericalangle AMK| = (90° + \alpha - \beta) + (\beta - \alpha) = 90°$, čo je pravý uhol. To ale znamená, že bod M leží na Tálesovej kružnici zostrojenej nad úsečkou $A'B$, pričom polomer je a (lebo $|A'B| = 2a$). Z toho vyplýva, že L je stred kružnice, teda aj $|LM| = b$ predstavuje jej polomer a nakoľko kružnica má polomer len jeden, nutne $a = b$.

Iné riešenie:



Označme $|\sphericalangle CAB| = \alpha, |\sphericalangle AMK| = \beta$. Potom $|\sphericalangle LMB| = 90° - \beta$, pretože $|\sphericalangle LMK| = 90°$ a podobne $|\sphericalangle ABC| = 90 - \alpha°$, pretože $|\sphericalangle ACB| = 90°$. Zo sínusovej vety pre trojuholník AKM máme

$$\frac{b}{\sin(\alpha)} = \frac{a}{\sin(\beta)} \Longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

a pre trojuholník BLM máme

$$\frac{b}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{a}{\sin(90° - \beta)} \Longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin(90° - \alpha)}{\sin(90° - \beta)}.$$

Porovnaním výrazov s podielom b a a dostávame goniometrickú rovnicu, ktorú ďalej riešime úpravou pravej strany súčtovými vzorcami. Dopredu uvádzame, že nakoľko sú α aj β ostré uhly, nasledujúce úpravy sú ekvivalentné a výrazy majú zmysel:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(90° - \alpha)}{\sin(90° - \beta)} = \frac{\sin(90°)\cdot\cos(\alpha) - \cos(90°)\cdot\sin(\alpha)}{\sin(90°)\cdot\cos(\beta) - \cos(90°)\cdot\sin(\beta)} = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \Longrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \Longrightarrow \tan(\alpha) = \tan(\beta).$$

Posledná rovnica má na intervale $(0°, 90°)$ riešenie $(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha)$ pre ľubovoľný uhol α z daného intervalu. To znamená, že trojuholníky AMK aj MLB sú oba rovnoramenné so základňami AM a MB a teda $a = b$.

Iné riešenie:
Toto nie je samotné riešenie, ale len návod na ďalšie dva spôsoby, ktorými si môžete úlohu sami vyriešiť.

1. Sporom predpokladajme, že $a > b$, potom uhol oproti AK v AKM je väčší ako uhol oproti MK v AKM, podobnú úvahu vieme urobiť aj pre uhly v BLM. Teraz porovnajme výrazy $|\sphericalangle AMK|+|\sphericalangle BML| = 90°$ a $|\sphericalangle KAM|+|\sphericalangle LBM| = 90°$. Nevedie to k sporu? Podobný spor dostaneme aj pre $b > a$, preto $a = b$.

2. Cesta tiež vedie cez dokreslenie výšok na strany AM, resp. BM v trojuholníkoch AKM a BLM (označme päty výšok X, resp. Y). Z podobnosti AXM a LYB a tiež dvojice KXM a MYL vieme ukázať, že $|AX| = |MX|$, resp. $|MX| = |BX|$, z čoho vyplynie $a = b$.

Komentár: Táto úloha bola neobyčajne príjemná (vzhľadom na to, že to je úloha číslo 5). Bolo možné ju riešiť rôznymi prístupmi, pričom všetky si vyžadovali len zopár krokov. Aj napriek tomu sa veľa riešiteľov nechalo oklamať a skutočnosť, že $|\sphericalangle LCK| = |\sphericalangle LMK| = 90°$ a $|LM| = |KM|$ im stačila na prehlásenie $KMLC$ za štvorec, čo ale všeobecne neplatí. Zlý úvodný predpoklad sa s nimi potom tiahol celým riešením a platnosť $a = b$ tak ukázali len pre tento špeciálny prípad.

6.

Opravoval: Maťo Vodička
Počet riešiteľov: 17

Univerzálnou postupnosťou čísel 1, 2, $\dots, n$ nazveme takú (konečnú) postupnosť týchto čísel, že vyčiarknutím niektorých jej členov z nej dostaneme ľubovoľnú permutáciu týchto čísel (napr. 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1 je univerzálna postupnosť čísel 1, 2, 3, lebo ľahko preveríme, že všetky permutácie, t.j. $1,2,3;\ 1,3,2;\ 2,1,3;\ 2,3,1;\ 3,1,2;\ 3,2,1$ vzniknú vyčiarknutím niektorých jej členov). Nájdite najkratšiu univerzálnu postupnosť čísel 1, 2, 3 a potom aj čísel 1, 2, 3, 4 a dokážte, že kratšie neexistujú.

Riešenie:

Napriek tomu, že úloha od nás chce, aby sme niečo (našli najkratšie univerzálne postupnosti) spravili pre 3 a 4, tak sa môžeme pozrieť, ako to vyzerá pre menšie hodnoty. Dĺžka najkratšej univerzálnej postupnosti pre číslo 1 je zrejme 1. To bolo až príliš jednoduché. Skúsme ju nájsť pre 1, 2. Tá ma tak isto triviálne dĺžku 3, a je to 121 alebo 212. Skúsme však naozaj korektne povedať, prečo menej nejde. Totiž naše argumenty sa (s trochou šťastia) budú dať použiť pre väčšie prípady. Každé číslo musí byť v univerzálnej postupnosti aspoň raz, to je zjavné. A niektoré (BUNV je to 2) sa prvýkrát vyskytne najskôr až na druhom mieste, lebo nemôžu byť obe prvé :). No to ale znamená, že za touto 2 musí ešte nasledovať 1, lebo inak by sme nevedeli dostať postupnosť 21. A to už nám dáva spolu aspoň 3 čísla v postupnosti.

Dobre, tak skúsme tieto argumenty použiť pre prípad 1, 2, 3. Každé číslo sa bude musieť v postupnosti nachádzať aspoň raz, fajn. Vieme, že niektoré z nich (BUNV 3) bude najskôr tretie. Čo musí byť za číslom 3? No musíme vedieť vytvoriť 312 aj 321, a preto za číslom 3 musí nasledovať univerzálna postupnosť pre 1, 2. To už je spolu 6 čísel, lebo tá má dĺžku 3. Ale teraz si uvedomíme, že ak v tej postupnosti je ešte jedna 3, tak dostávame postupnosť dĺžky aspoň 7. A ak tam žiadna 3 nie je, tak aj pred tou 3 musí byť univerzálna postupnosť pre 1,2 (aby sme vytvorili 123 a 213), čo je spolu tiež 7 čísel. To znamená, že v každom prípade tam musí byť 7 čísel, a taká sa už ľahko skonštruuje podľa toho, čo tu bolo popísané - 1213121 len s jedným číslom 3 alebo 1231231 s dvoma.

Podobne môžeme postupovať pre 1,2,3,4. Zase sa pozrieme na číslo (BUNV 4), ktoré sa nachádza najskôr na 4. mieste. Ak je v postupnosti len jedno číslo 4, tak aj pred ním aj za ním musí byť univerzálna postupnosť pre 1,2,3 - čo by bolo spolu aspoň 15.

A ak sú tam aspoň dve čísla 4, tak za tým prvým je aspoň 8 čísel, konkrétne univerzálna postupnosť pre 1,2,3 (7 čísel) a druhé číslo 4. To je spolu 12 čísel.

A pre 12 sa naozaj vytvoriť dá. Vieme o nej celkom dosť - napr. vyskytuje sa v nej číslo 4 len dvakrát, z toho raz na 4. mieste a pred ním sú všetky čísla. Teda môžeme skúsiť niečo ako 12341231231 a dopísať niekde 4. Po chvíli skúšania isto prídeme na to, že 123412314231 vyhovuje, a preto najkratšia univerzálna postupnosť pre 1,2,3,4 má dĺžku 12.

Komentár: S nájdením postupnosti pre 123 dĺžky 7 neboli problémy (veď bola aj v zadaní :P). Problémy ale už boli s nájdením postupnosti pre 1234 dĺžky 12. Snažili ste sa často hľadať niečo „pekné“ (typický príklad je 1234123412341), čo často nie je dobrý nápad, lebo riešenie môže byť „škaredé“, nesymetrické. Najväčší problém ale bol s dokázaním, že vaše postupnosti sú najkratšie. Veľa vás ich nejak postupne konštruovalo a snažilo sa povedať, že ich konštruuje „najlepšie“ tak, že tam nejak pridá vždy to „najvýhodnejšie“ číslo. Také postupy niekedy fungujú, ale veľmi často to tak nie je. A v každom prípade to určite nie je dôkaz, ak nejak intuitívne zostrojíte niečo, čo by malo byť najkratšie a prehlásite, že keďže sme to zostrojovali takto, tak to je najlepšie. Na dôkaz naozaj treba buď rozobrať všetky možnosti, (ktorých je ale véééééľa), alebo nejakým spôsobom spočítať (napr. tak ako vo vzoráku), že aspoň niekoľko čísel tam proste byť musí, bez ohľadu na to, v akom sú poradí.

Autori vzorových riešení: Matúš Hlaváčik, Peter Kovács, Henka Micheľová, Dano Onduš

Konečné poradie Letného semestra 41. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1.	Matej Hanus	S1	GPostKE	46	9	-	9	9	9	3	94
2.	Martin Števko	S2	GAlejKE	54	9	2	1	7	9	9	92
3.	Miroslav Macko	S1	LEAF	52	8	1	5	3	9	-	87
4.	Branislav Pastula	S1	GPostKE	42	9	-	9	9	-	5	83
5. - 7.	Dávid Pásztor	S1	GJarPO	42	8	3	9	9	-	2	82
	Jakub Pravda	S1	ŠpMNDaG	48	9	1	9	3	3	-	82
	Sára Kuťková	S3	HERH	54	9	4	-	6	9	-	82
8.	Dorota Porubská	S1	GLeoBJ	39	9	0	2	9	3	6	77
9.	Martin Mihálik	S2	GAlejKE	50	9	3	9	5	-	-	76
10.	Timea Szöllősová	S1	GAMČA	41	8	8	-	-	-	9	75
11.	Peter Onduš	S3	ŠpMNDaG	52	9	1	9	-	-	2	73
12.	Martin Masrna	S3	GPostKE	35	9	3	9	7	9	-	72
13.	Patrik Paľovčík	S1	GPostKE	36	8	-	9	-	9	-	71
14.	Lujza Milotová	Z9	ZBrusKE	27	9	3	9	3	9	-	69
15.	Filip Csonka	S2	GAlejKE	50	9	0	9	-	-	-	68
16.	Róbert Sabovčík	S1	GPostKE	41	9	-	-	5	3	-	67
17.	Norbert Micheľ	Z9	ZKro4KE	34	9	3	3	7	-	-	65
18.	Michal Vorobel	Z9	GJarPO	30	9	-	2	4	9	-	63
19.	Michal Masrna	S1	GPostKE	44	9	-	-	-	-	-	62
20.	Radovan Lascsák	S1	GPostKE	29	9	1	6	-	-	6	60
21.	Štefánia Glevitzká	S2	GVBN	31	8	-	1	9	9	-	58
22.	Viktória Brezinová	S2	GAlejKE	28	9	-	9	9	-	-	55
23.	Martin Spišák	S3	GAlejKE	34	9	-	2	-	9	-	54
24. - 27.	Ján Richnavský	Z9	ZKro4KE	27	9	0	3	4	-	1	53
	Martin Starovič	S1	GAMČA	35	9	-	-	-	-	-	53
	Michaela Rusnáková	Z9	GAlejKE	26	8	2	-	3	3	3	53
	Alex Chudíc	S1	ŠpMNDaG	35	9	-	-	-	-	-	53
28. - 29.	Samuel Krajči	S2	GAlejKE	52	0	0	0	0	0	0	52
	Tomáš Ganz	S1	ŠpMNDaG	38	7	-	-	-	-	-	52
30.	Martin Albert Gbúr	S1	GPostKE	23	8	1	-	1	9	0	51
31.	Michaela Bobeničová	S2	GPostKE	39	8	2	-	-	0	1	50
32.	Klára Hricová	Z9	ZKro4KE	36	5	-	-	-	3	-	49
33. - 34.	Gabriela Genčiová	Z9	ZKro4KE	27	7	2	-	-	3	-	46
	Tomáš Chovančák	S1	GPostKE	18	9	1	6	-	3	-	46
35. - 38.	Barbora Barančíková	S1	ŠpMNDaG	26	9	-	-	-	-	-	44
	Simona Sabovčíková	Z9	ZKro4KE	25	8	-	-	-	3	-	44
	Miriam Magočiová	S1	GPostKE	25	8	-	-	-	3	-	44
	Benjamín Mravec	S1	GPostKE	25	8	-	2	-	-	1	44
39.	Jakub Farbula	Z9	GAlejKE	24	9	-	-	-	-	-	42
40.	Ondrej Tomášik	S1	GJgtBB	16	8	-	1	-	8	-	41
41.	Róberta Juríková	S2	GVBN	9	8	-	1	7	9	2	37
42.	Jonáš Suvák	S1	GJarPO	23	-	5	-	-	3	-	36

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
43.	Matej Tarča	S1	GPostKE	35	-	-	-	-	-	-	35
44.	Vratislav Madáč	S2	GAlejKE	22	8	-	-	-	3	-	33
45.	Michaela Dlugošová	S3	GKukuPO	10	9	-	9	1	-	2	31
46.	Matej Moško	S2	GAMČA	0	9	1	9	7	3	-	30
47.	Erik Berta	S2	GAlejKE	9	8	0	9	-	3	-	29
48. - 51.	Daniel Magula	S3	PiarG	27	-	-	-	-	-	-	27
	Martin Šalagovič	S2	GAlejKE	9	9	-	9	-	-	-	27
	Tatiana Bielaková	S1	GAMČA	27	-	-	-	-	-	-	27
	Andrej Pankuch	Z9	GAlejKE	20	-	1	3	-	-	-	27
52.	Samuel Chaba	S2	GAlejKE	16	8	-	-	-	-	-	24
53.	Erik Řehulka	S1	ŠpMNDaG	0	8	6	-	-	-	-	22
54. - 55.	Jakub Venglik	S2	GPOHKK	21	-	-	-	-	-	-	21
	Katarína Kuľková	S3	GPostKE	9	9	-	-	0	3	-	21
56.	Dominika Nguyen	Z9	GAlejKE	20	-	-	-	-	-	-	20
57. - 60.	Dominika Jurášová	S1	ŠpMNDaG	18	0	0	0	-	-	-	18
	Samuel Novák	S1	GPostKE	18	-	-	-	-	-	-	18
	Andrea Faguľová	S1	GPostKE	0	9	-	-	-	-	-	18
	Kristína Bratková	S4	EGJAK	0	9	-	-	-	9	-	18
61.	Marek Koman	S3	GAlejKE	17	-	-	-	-	-	-	17
62.	Lucia Hlaváčiková	S3	GCharkKE	16	-	-	-	-	-	-	16
63.	Kristína Grolmusová	S1	BGMH	0	1	0	2	2	3	2	13
64.	Juraj Vlašič	S2	GAEinBA	10	-	-	-	-	-	-	10
65. - 66.	Juraj Jursa	S3	LEAF	0	9	-	-	-	-	-	9
	Jaroslav Paška	S2	ŠpMNDaG	0	9	-	-	-	-	-	9
67.	Klara Kapustová	Z9	Gympk	2	-	-	-	-	-	-	2
68.	Eduard Čekel	S1	TA	0	-	-	-	-	-	-	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Máj 2017 • Letný semester 41. ročníka (2016/2017)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `https://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.