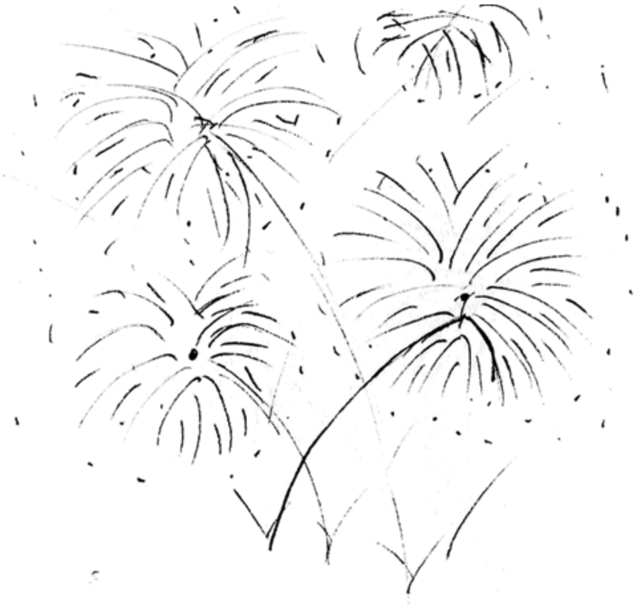
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Vitajte,

tak ako každý rok, aj tentoraz začal nový rok. Navyše už tradične začal v januári. Hoci nie sme historici, povedali sme si, že by sme aj my mohli spraviť niečo tradičné. A tak sme pre vás našli 12 príkladov, ktoré síce nie sú rovnaké ako pred rokom, ale to vás snáď nezastaví.

Navždy vaši **STROM**isti



Náboj

Nezadržateľne sa k nám blíži aj najväčšia tímová súťaž roku a to náš obľúbený Náboj. Tento rok sa uskutoční 23. 3. 2018. Zapoja sa mestá Bratislava, Košice, Praha, Opava, Passau, Linz, Krakov, Wroclav, Varšava, Gdyňa, Budapešť, Veszprém a Edinburgh, takže konkurencia bude naozaj vysoká. Ak o súťaži veľa neviete a chceli by ste sa so svojou školou zapojiť, prípadne získať nejaké informácie naviac, navštívte http://math.naboj.org/. Detaily sa budú čoskoro posielať aj na školy. **STROM**áci sa na vás už tešia v Košiciach :)

2% z daní

Aj tento rok môžu vaši rodičia venovať 2% zo svojich daní verejno–prospešným organizáciám ako sme my (dokonca niektorí až 3%).

Peniaze získané z 2% v **STROM**e využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústredeniach,...).

Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a kľudne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh seminára a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispejú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.

Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke `https://zdruzenie.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/` a radi vám zodpovieme na ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj mailom na `info@strom.sk`. Ďakujeme!

Pokyny pre riešiteľov – POZOR ZMENY

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov, v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov a riadi sa organizačným poriadkom zaregistrovaným na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.

Registrácia

Korešpondenčný matematický seminár STROM je jednou z aktivít národného projektu IT Akadémia - vzdelávanie pre 21. storočie (`https://itakademia.sk`). Pred tým, ako odošleš prvé príklady (poštou alebo elektronicky), je preto potrebné, aby si sa na túto aktivitu prihlásil.

Ak si sa zapojil do niektorej z našich aktivít v rámci národného projektu, tak už máš konto na portáli `https://registracia.itakademia.sk`. V takomto prípade stačí, ak sa prihlásiš na aktivitu Korešpondenčný matematický seminár STROM na tomto portáli.

Ak ešte nie si registrovaný v projekte, vyplň kontaktné údaje v dotazníku, ktorý nájdeš na stránke seminára, a my ti konto vytvoríme.

Registrácia je povinná, ak chceš, aby tvoje riešenia boli opravené. Vďaka tomu, že seminár je jednou z aktivít projektu, sú všetky aktivity v rámci neho pre teba bezplatné, a tak, ak sa budeš snažiť, budeš sa môcť zúčastniť sústredenia v Danišovciach bezplatne a pre najlepších troch riešiteľov sú pripravené knižné poukážky.

V prípade, že máš akékoľvek otázky k registrácii, neváhaj nás kontaktovať e-mailom na `sutaze@itakademia.sk`.

Prihlásenie do semestra prebieha online, na našej webovej stránke `http://seminar.strom.sk`. Ak si novým riešiteľom, alebo ešte nemáš vytvorený účet, zaregistruj sa a vyplň povinné údaje v užívateľskom profile – odkaz `Aktualizovať profil` v sekcii `Správa účtu`. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s Tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole (napr. prázdniny), v prípade pozývania na sústredenie a tiež, aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti seminára. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia, bez ohľadu na to, ako si ich poslal.

Prihláška (vyplnenie profilu) je **povinná pre všetkých riešiteľov**. Úlohy, ktoré sa nedajú priradiť k užívateľovi s korektne vyplneným profilom, **nebudú opravené**.

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete posielať poštou alebo cez našu webovú stránku, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zvážte, či nenapíšete svoje riešenia na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

Elektronické odovzdávanie je možné do uvedeného termínu cez nový webový portál na stránke `seminar.strom.sk`. Súbor s riešením odovzdáte jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu - tlačidlo `Odovzdať` pri konkrétnom príklade v sekcii `Príklady`. Úlohy odovzdávajte primárne vo formáte PDF, portál na vaše riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC.

V prípade technických problémov na našej strane posielajte riešenia na e-mailovú adresu `riesenia@strom.sk` vo formáte PDF (každý príklad v samostatnom súbore), najneskôr v deň termínu série do 22.00 (pozor na to, že maximálna veľkosť mailu je 10MB). Tento spôsob odovzdania je len núdzový a v prípade nedodržania podmienok úlohy nebudú opravené.

Riešenie každej úlohy píšte na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás prostredníctvom komentárom k úlohám na našej stránke, cez e-mail `strom@strom.sk` alebo osobne.

V prípade, že sa rozhodnete svoju úlohu riešiť prehľadaním všetkých možností, napríklad pomocou nejakého programu, je nutné ukázať, že ste prehľadali všetky možnosti a váš program pracoval správne. Za riešenie programom bez popisu a vysvetlenia, prečo program funguje korektne, nebudú udelené body. Ak do riešenia prikladáte akýkoľvek kód, musí to byť nutne pseudokód s patričnými komentármi čitateľný pre akéhokoľvek človeka. Nepredpokladá sa, že každý opravovateľ pozná všetky programovacie jazyky.

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

štvrtáci, oktáva:	všetky vyriešené úlohy
tretiaci, septima:	všetky vyriešené úlohy
druháci, sexta:	päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh
prváci, kvinta a mladší:	päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

Príklad použitia pravidiel:

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za $3, 2, 4, 1, 5$ a 4 body. Vlado potom získal $3+2+4+1+5+4=19$ bodov, Fero tiež získal $3+2+4+1+5+4=19$ bodov, Jaro $(3+\underline{2}+4+5+4)+2=20$ bodov a Marcel $(3+2+4+\underline{5}+4)+5=23$ bodov. Jasné, nie?

Riešenia po termíne

V prípade, že svoje riešenie pošleš po termíne odovzdania, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené do štyroch dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhneme body. Body sa strhávajú nasledovne, podľa dĺžky omeškania:

- do 24 h: 2/3 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako 24h a do štyroch dní: 1/2 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako štyri dni: riešenie neopravujeme

Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznížiť.

Opisovanie

Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú aj za odpisovanie. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie).

V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešení zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrená.

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastňujú sa ho riešitelia korešpondenčných sérií na základe poradia po korešpondenčných sériách danej časti ročníka. Sústredenia sa môžu zúčastniť aj úspešní riešitelia iných matematických súťaží organizovaných PF UPJŠ v Košiciach a Združením STROM, ak to kapacitné možnosti umožnia. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im príslušných ročníkov na osemročnom gymnáziu), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškolákmi) sú pozvaní ako náhradníci. Ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROM**u, nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou.

Zadania úloh letného semestra 42. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na *`https://seminar.strom.sk`.*

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **19. 3. 2018**

1. Určte počet všetkých neusporiadaných trojíc dvojciferných prirodzených čísel a, b, c, ktorých súčin abc má zápis, v ktorom sú všetky cifry rovnaké.

2. Koľkými spôsobmi je možné ofarbiť čísla $1, 2, \ldots, n$ červenou, zelenou a modrou farbou tak, že párne čísla nie sú zelené a žiadne dve susedné čísla nemajú rovnakú farbu?

3. Keďže Matúšova fenka Bodka je lenivá chodiť od jedného stromu k druhému, tak jej Matúš postavil systém minivláčikov. Medzi každými dvoma stromami v parku jazdí minivláčik práve v jednom smere. Bodka sa rozhodla, že si vyplní čas tým, že si vyberie nejaký prvý strom a potom sa prevezie minivláčikmi tak, že každý strom navštívi práve raz (a medzi stromami sa bude pohybovať len pomocou minivláčikov). Dokážte, že si tak Bodka vie vybrať bez ohľadu na to, ako Matúš minivláčiky postavil.

4. Nech $a, b, c \geq -1$ sú také reálne čísla, že $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Dokážte, že $a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 \leq 4$.

5. Daný je štvorec $ABCD$. Nájdite množinu všetkých bodov P takých, že existuje rovnoramenný pravouhlý trojuholník APQ s pravým uhlom pri vrchole P a bod Q leží na strane CD.

6. V rovine je niekoľko priamok, pričom žiadne tri neprechádzajú jedným bodom a žiadne dve nie sú rovnobežné. Tieto priamky rozdelia rovinu na niekoľko oblastí. Dokážte, že môžeme dať do každej oblasti kladné číslo tak, aby pre každú priamku platilo, že súčet čísel v oblastiach na jednej strane priamky je rovnaký ako súčet čísel v oblastiach na druhej strane.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **7. 5. 2018**

1. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že všetky tri čísla $2n^2 + 1$, $3n^2 + 1$ a $6n^2 + 1$ sú druhými mocninami celých čísel.

2. Nech p, q sú reálne čísla také, že rovnica $x^3 + px + q = 0$ má tri rôzne reálne riešenia. Dokážte, že potom platí $p \leq 0$.

3. Vodka a Tomáško hrajú hru na plániku 2018×2. Obaja majú 2×1 domino bloky, ktoré postupne po jednom pokladajú na plánik (v ťahoch sa striedajú a hráč musí v ťahu položiť blok na plán). Tomáško začína a môže pokladať bloky len v horizontálnom smere (ten, v ktorom má plánik rozmer 2018). Vodka môže pokladať bloky len vo vertikálnom smere. Hráč, ktorý nevie spraviť ťah, prehráva. Zistite, pre ktorého z hráčov existuje výherná stratégia.

4. Kružnica so stredom v bode I je vpísaná do štvoruholníka $ABCD$. Polpriamky BA a CD sa pretínajú v bode P, polpriamky AD a BC sa pretínajú v bode Q. Za predpokladu, že P leží na kružnici opísanej trojuholníku AIC dokážte, že Q tiež leží na tejto kružnici.

5. Nájdite najmenšie prvočíslo, ktoré sa nedá zapísať v tvare $|2^a - 3^b|$, kde a, b sú nezáporné celé čísla.

6. Nájdite všetky funkcie $f : \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$, ktoré vyhovujú súčasne nasledujúcim trom podmienkam:

1. pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla x, y také, že $x + y > 0$, platí rovnosť $f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(xy/(x + y))$,
2. $f(1) = 0$,
3. $f(x) > 0$ pre ľubovoľné $x > 1$.

Autori zadaní úloh: Tomáš Babej, Žaneta Semanišinová, Kristína Mišlanová, Roman Staňo, Daniel Onduš, Martin Vodička, Jakub Genči

Mohlo by sa hodiť...

Geometria

Tálesova veta: Trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C práve vtedy, keď AB je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Veta o obvodovom a stredovom uhle: Majme oblúk AB na kružnici so stredom S. Uhol ASB sa nazýva stredový uhol k oblúku (nad tetivou) AB. Nech X je ľubovoľný bod na dlhšom oblúku AB, potom uhol AXB sa nazýva obvodový k oblúku (nad tetivou) AB a jeho veľkosť je rovnaká pre každú polohu bodu X, a to polovica veľkosti príslušného stredového uhla.

Tetivový štvoruholník: Tetivový štvoruholník je taký, ktorému sa dá opísať kružnica. Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď je súčet veľkostí jeho protiľahlých vnútorných uhlov 180°.

Nerovnosti

KA - nerovnosť: Pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí, že ich kvadratický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), ich aritmetickému priemeru, t.j.

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

AG - nerovnosť: Pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí, že ich aritmetický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), ich geometrickému priemeru, t.j.

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

GH - nerovnosť: Pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí, že ich geometrický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), ich harmonickému priemeru, t.j.

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Všeobecná priemerová nerovnosť: Pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definujeme ich priemer p-tého rádu ako

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}}.$$

Priemer p-tého rádu čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je väčší, nanajvýš rovný (rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), ich priemeru q-tého rádu práve vtedy, keď $p \geq q$, t.j.

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}} \geq \sqrt[q]{\frac{x_1^q + \ldots + x_n^q}{n}}.$$

Poznámka. KA, AG a GH nerovnosti sú špeciálnymi prípadmi všeobecnej priemerovej nerovnosti.

Funkcionálne rovnice

Táto tématika sa na stredných školách veľmi nevyučuje, ale nie je to nič komplikované. Úlohou je len nájsť všetky funkcie, ktoré budú spĺňať zadanie. Najsilnejšia zbraň, ktorú máme v rukách, je to, že hľadaná funkcia spĺňa danú rovnosť pre všetky hodnoty premenných z jej definičného oboru. Preto môžeme funkcionálnu rovnicu riešiť tak, že skúsime za x a y dosádzať konkrétne hodnoty alebo výrazy. Takto odvodíme nutné podmienky, ktoré musí hľadaná funkcia spĺňať. Nejde však o podmienky postačujúce, a preto je potrebné výslednú funkciu do rovnice dosadiť a urobiť skúšku. Viac o tom, ako riešiť takéto úlohy nájdete napríklad tu: `https://old.kms.sk/~mazo/matematika/funkcionalne_rov.pdf`.

Matematická indukcia

Ak sa snažíme niečo dokázať pre všetky prirodzené čísla počnúc niektorým, stačí nám ukázať platnosť nášho tvrdenia pre toto počiatočné číslo a potom ukázať platnosť tvrdenia: „ak naše tvrdenie platí pre číslo n, potom platí aj pre číslo $n+1$.“ Základná myšlienka takéhoto dôkazu sa často ukazuje na domine. Niekedy sa tieto kvádre stavajú do dlhého radu tak, aby každý pri svojom páde so sebou stiahol na zem aj svojho bezprostredného suseda. Potom na to, aby spadli všetky kocky, postačí zhodenie prvej z nich. Inak povedané, ak vieme, že n. kocka zapríčiní pád $(n+1)$., stačí nám zapríčiniť pád 1. kocky radu.

Dirichletov princíp

Majme n predmetov a m priehradok. Chceme poukladať predmety do priehradok tak, aby každý predmet bol v práve jednej priehradke. Dirichletov princíp je jednoduché tvrdenie, že ak je $n > m$ (predmetov viac ako priehradok), tak potom v aspoň jednej priehradke budú aspoň dva predmety (v silnejšej verzii vieme tvrdiť, že pri n priehradkach a aspoň $kn+1$ predmetoch (pre prirodzené k) existuje priehradka s $k+1$ predmetmi).

Táto formulácia môže znieť neprakticky, no v rôznych úlohách môže byť tento princíp užitočný. Predstavte si napríklad čísla ako predmety a zvyšky po delení m ako priehradky. Vyriešite tak úlohu: dokážte, že z ľubovoľných 11 prirodzených čísel viete vybrať dve, ktorých rozdiel končí nulou.

Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár
	Číslo 4 • Február 2018 • Letný semester 42. ročníka (2017/2018)
Internet:	`http://seminar.strom.sk`
E-mail:	`strom@strom.sk`
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	`https://zdruzenie.strom.sk`
E-mail:	`info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk