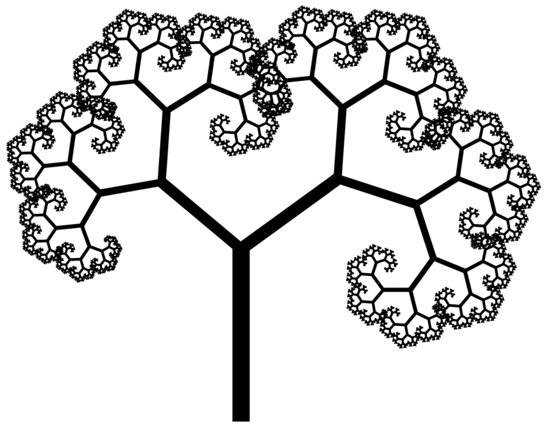
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Drahí študenti!



Započal deviaty mesiac osemnásteho roku dvadsiatehoprvého storočia a vy už viete, čo to znamená. Prvé číslo štyridsiatehotretieho ročníku **STROM**u je na svete. Už tradične na vás čakajú dve šestice úloh, ktoré určia približne tridsiatku vyvolených, ktorí dostanú ďalší nával čísel začiatkom zimy. Aby ste nepočítali úplne piate cez deviate, zavítajte aj do časti **Mohlo by sa hodiť ...** a majte svojich päť pohromade. Prajeme vám čo najviac úloh na deviatku. Dúfame, že z tohto číselneho úvodu nevidíte dvojmo. A ak by aj áno, je to jedno. Všetci predsa vieme, že riešitelia **STROM**u nie sú nuly.

Navždy vaši **STROM**isti

Košický Matboj

Už 18. ročník tejto súťaže sa uskutoční 26. októbra 2018 v Košiciach. Inštrukcie k prihlasovaniu na túto súťaž budú rozposlané na školy v druhej polovici septembra. Ak ste o súťaži doposiaľ nepočuli a radi by ste sa dozvedeli viac, zavítajte na `https://seminar.strom.sk/sk/matboj/`, kde nájdete zadania a riešenia starších ročníkov, respektíve do galérie s fotografiami z minulých Matbojov.

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov a riadi sa organizačným poriadkom zaregistrovaným na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.

Registrácia

Korešpondenčný matematický seminár STROM je jednou z aktivít národného projektu IT Akadémia - vzdelávanie pre 21. storočie (`https://itakademia.sk`). Pred tým ako odošleš prvé príklady (poštou, alebo elektronicky), je preto potrebné, aby si sa na túto aktivitu prihlásil.

Ak si sa zapojil do niektorej z našich aktivít v rámci národného projektu, tak už máš konto na portáli `https://registracia.itakademia.sk`. V takomto prípade stačí, ak sa prihlásiš na aktivitu Korešpondenčný matematický seminár STROM na tomto portáli.

Ak ešte nie si registrovaný v projekte, vyplň nám kontaktné údaje v dotazníku, ktorý nájdeš na stránke seminára, a my ti konto vytvoríme.

Registrácia je povinná, ak chceš, aby tvoje riešenia boli opravené. Vďaka tomu, že seminár je jednou z aktivít projektu, sú všetky aktivity v rámci neho pre teba bezplatné, a tak, ak sa budeš snažiť, budeš sa môcť zúčastniť sústredenia v Danišovciach bezplatne a pre najlepších troch riešiteľov sú pripravené aj knižné poukážky.

S registráciou nech ti pomôžu rodičia alebo učiteľ v škole. V prípade, že máš ty alebo tvoji rodičia, resp. učitelia akékoľvek otázky k registrácii, neváhajte nás kontaktovať e-mailom na `sutaze@itakademia.sk`.

Prihlásenie do semestra prebieha online, na našej webovej stránke `http://seminar.strom.sk`. Ak si novým riešiteľom, alebo ešte nemáš vytvorený účet, zaregistruj sa a vyplň povinné údaje v užívateľskom profile – odkaz `Aktualizovať profil` v sekcii `Správa účtu`. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s Tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole (prázdniny, ...), v prípade pozývania na sústredenie a tiež, aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti semináru. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia, bez ohľadu na to, ako si ich poslal.

Prihláška (vyplnenie profilu) je **povinná pre všetkých riešiteľov**. Úlohy, ktoré sa nedajú priradiť k užívateľovi s korektne vyplneným profilom, **nebudú opravené**.

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete posielať poštou alebo cez našu webovú stránku, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zvážte, či nenapíšete svoje riešenia na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

Elektronické odovzdávanie je možné do uvedeného termínu cez nový webový portál na stránke `http://seminar.strom.sk`. Súbor s riešením odovzdáte jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu - tlačidlo `Odovzdať` pri konkrétnom príklade v sekcii `Príklady`. Úlohy odovzdávajte primárne vo formáte PDF, portál na vaše riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC (riešenia si po nahraní radšej skontrolujte).

Jedine v prípade technických problémov na našej strane je možné poslať riešenia na e-mailovú adresu `riesenia.strom@strom.sk` vo formáte PDF (riešenia v inom formáte nebudú akceptované).

Riešenie každej úlohy píšte na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás prostredníctvom komentárom k úlohám na našej stránke, cez e-mail `strom@strom.sk` alebo osobne.

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

štvrtáci, oktáva:	všetky vyriešené úlohy
tretiaci, septima:	všetky vyriešené úlohy
druháci, sexta:	päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh
prváci, kvinta a mladší:	päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

Príklad použitia pravidiel:

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za $3, 2, 4, 1, 5$ a 4 body. Vlado potom získal $3+2+4+1+5+4=19$ bodov, Fero tiež získal $3+2+4+1+5+4=19$ bodov, Jaro $(3+\underline{2}+4+5+4)+2=20$ bodov a Marcel $(3+2+4+\underline{5}+4)+5=23$ bodov. Jasné, nie?

Riešenie založené na využití výpočtovej techniky spravidla nebude ohodnotené vysokým počtom bodov.

Hodnotené budú len tie časti riešenia, ktorých správnosť je možné overiť v primeranom čase.

Riešenia po termíne

V prípade, že svoje riešenie pošleš po termíne odovzdania, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené do štyroch dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhneme body. Body sa strhávajú nasledovne, podľa dĺžky omeškania:

- do 24 h: 2/3 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako 24h a do štyroch dní: 1/2 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako štyri dni: riešenie neopravujeme

Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznížiť.

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od opravenia riešení zaslať e-mailom sťažnosť a tá bude prešetrená.

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastňujú sa ho riešitelia korešpondenčných sérií na základe poradia po korešpondenčných sériách danej časti ročníka. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im príslušných ročníkov na osemročnom gymnáziu), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškolákmi) sú pozvaní ako náhradníci. Ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROM**u, nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou.

Zadania úloh zimného semestra 43. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `https://seminar.strom.sk`.

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **29. 10. 2018**

1. Dokážte, že ak sú a, b, c, d reálne čísla a $ac = 2(b+d)$, tak má aspoň jedna z rovníc $x^2 + ax + b = 0$ a $x^2 + cx + d = 0$ všetky korene reálne.

2. Majme trojuholník ABC, kde AB je najdlhšia jeho strana. Zvoľme bod D tak, aby sa nachádzal na opačnej polpriamke k BA, teda B je medzi bodmi A a D a zároveň platí $|BC| = |BD|$. Dokážte, že trojuholník ACD je tupouhlý.

3. Máme n bodov v rovine. Môžeme urobiť to, že dva z nich vyberieme a následne obidva presunieme do stredu úsečky, ktorá ich spája. Body iba presúvame, žiaden z nich nezaniká. Zistite, pre ktoré n je možné vždy presúvať dané body tak, aby všetky splynuli (boli v jednom bode).

4. Nájdite všetky polynómy $P(x)$ s reálnymi koeficientami, ktoré spĺňajú $(x^2 - 6x + 8) \cdot P(x) = (x^2 + 2x) \cdot P(x-4)$ pre všetky reálne čísla x.

5. Majme n^2 bodov rozmiestnených do mriežky $n \times n$. Z nich náhodne vyberieme $2n$ bodov. Dva vybrané body sú spojené zelenou úsečkou, ak sú v rovnakom riadku, a červenou úsečkou, ak sú v rovnakom stĺpci. Dokážte, že existuje uzavretá lomená čiara s vrcholmi vo vybraných bodoch a so stranami tvorenými týmito úsečkami taká, že sa farby jej strán striedajú.

6. Prirodzené číslo n nazveme chutné, ak pre ľubovoľné dve prirodzené čísla a, b také, že $a + b = n$ platí, že aspoň jeden zo zlomkov $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ má konečný desatinný rozvoj. Existuje nekonečne veľa chutných čísel? Svoje riešenie odôvodnite.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **3. 12. 2018**

1. Nech $ABCD$ je štvoruholník, v ktorom existuje kružnica, ktorá prechádza stredmi všetkých strán tohto štvoruholníka. Dokážte, že AC a BD sú na seba kolmé.

2. Máme riadok, v ktorom je 1000 čísel. Pod tento riadok pridáme ďalší tak, že pod každým číslom a je napísaná hodnota $f(a)$, kde $f(a)$ je počet výskytov čísla a v predchádzajúcom riadku. Takto postupne pridávame ďalšie riadky. Dokážte, že po pridaní dostatočného počtu riadkov budú pod sebou dva rovnaké riadky.

3. Je daná rovnica $x!y!z! = t!$, kde x, y, z, t sú prirodzené čísla väčšie ako jedna. Ukážte, že existuje nekonečne veľa štvoríc (x, y, z, t), ktoré spĺňajú túto rovnicu. *Pozn.: $n!$ je číslo $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.*

4. Majme n nenulových čísel, ktorých súčet je 0. Ukážte, že je možné ich očíslovať tak, aby platila nerovnosť:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_1 < 0.$$

5. Dokážte, že ľubovoľné celé číslo môže byť napísané ako súčet 5 tretích mocnín celých čísel.

6. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s $|AB| < |AC|$. Nech M, N sú postupne stredy strán AB a AC a nech AD je výška v tomto trojuholníku. Na úsečke MN zvolíme taký bod K, že $|BK| = |CK|$. Polpriamka KD pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode Q. Dokážte, že body C, N, K, Q ležia na jednej kružnici.

Autori zadaní úloh: Žaneta Semanišinová, Martin Masrna, Kristína Mišlanová, Roman Staňo, Peter Kovács, Daniel Onduš, Jakub Genči

Mohlo by sa hodiť

Geometria

Veta o obvodovom a stredovom uhle: Majme oblúk AB na kružnici so stredom S. Uhol ASB sa nazýva stredový uhol k oblúku (nad tetivou) AB. Nech X je ľubovoľný bod na dlhšom oblúku AB, potom uhol AXB sa nazýva obvodový k oblúku (nad tetivou) AB a jeho veľkosť je rovnaká pre každú polohu bodu X, a to polovica veľkosti príslušného stredového uhla.

Tetivový štvoruholník: Tetivový štvoruholník je taký, ktorému sa dá opísať kružnica. Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď je súčet veľkostí jeho protiľahlých vnútorných uhlov 180°.

Matematická indukcia

Ak sa snažíme niečo dokázať pre všetky prirodzené čísla počnúc niektorým, stačí nám ukázať platnosť nášho tvrdenia pre toto počiatočné číslo a potom ukázať platnosť tvrdenia: „ak naše tvrdenie platí pre číslo n, potom platí aj pre číslo $n + 1$.“ Základná myšlienka takéhoto dôkazu sa často ukazuje na domine. Niekedy sa tieto kvádre stavajú do dlhého radu tak, aby každý pri svojom páde so sebou stiahol na zem aj svojho bezprostredného suseda. Potom na to, aby spadli všetky kocky, postačí zhodenie prvej z nich. Inak povedané, ak vieme, že n. kocka zapríčiní pád $(n+1)$., stačí nám zapríčiniť pád 1. kocky radu.

Dirichletov princíp

Majme n predmetov a m priehradok. Chceme poukladať predmety do priehradok tak, aby každý predmet bol v práve jednej priehradke. Dirichletov princíp je jednoduché tvrdenie, že ak je $n > m$ (predmetov viac ako priehradok), tak potom v aspoň jednej priehradke budú aspoň dva predmety (v silnejšej verzii vieme tvrdiť, že pri n priehradkach a aspoň $kn+1$ predmetoch (pre prirodzené k) existuje priehradka s $k+1$ predmetmi).

Polynómy

Polynóm, alebo aj mnohočlen, stupňa n je výraz v tvare $P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, kde a_i sú dané konštanty a x je premenná. Číslo t sa nazýva koreňom polynómu P, ak platí, že $P(t) = 0$, teda polynóm má v tomto bode hodnotu nula. V takom prípade výraz $(x - t)$ delí celý polynóm P, čiže platí $P(x) = (x - t) \cdot Q(x)$, kde Q je polynóm stupňa $n - 1$.

Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár
	Číslo 1 • September 2018 • Zimný semester 43. ročníka (2018/2019)
Internet:	http://seminar.strom.sk
E-mail:	strom@strom.sk
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	https://zdruzenie.strom.sk
E-mail:	info@strom.sk

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk