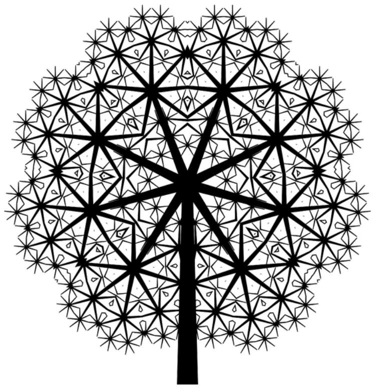
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte!



Vonku sa otepľuje, slnečných dní pribúda a príroda sa prebúdza. To je dosť dôvodov na radosť. A my vám prinášame ďalší: vaše opravené riešenia, vzoráky a komentáre. Dúfame, že vás potešia. Ale okrem toľkého tešenia sa nezabúdajte ani na príklady druhej série, ktorá je rozhodujúca a môže úplne zamiešať poradím. A ak na tom po prvej sérii nie ste práve najlepšie, tak ešte nehádžte flintu do žita, snažte sa o to viac a motyka možno vystrelí.

Prajeme vám veľa skvelých nápadov!

Navždy vaši **STROM**isti

TMM

Aj toto leto môžeš stráviť týždeň plný zábavy s kamarátmi a super vedúcimi na Tábore mladých matematikov.

TMM sa bude konať **11. - 18. augusta** v Chate Radzim pri obci Vyšná Slaná a je určené pre budúcich siedmakov až budúcich druhákov na strednej škole. Kompletné informácie ako aj prihlasovanie nájdeš na našej stránke.

Tábor sa plní a preto neváhaj a registruj sa ešte dnes, nech neprídeš o miesto.

1.

Opravovali: Žanetka Semanišinová, Kubo Genči
Počet riešiteľov: 49

Dokážte, že $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ nie je racionálne číslo pre žiadne celočíselné n.

Riešenie:

Tvrdenie zo zadania budeme dokazovať sporom. Predpokladajme, že $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ je racionálne pre nejaké celočíselné n. Položíme preto tento výraz rovný zlomku p/q, kde $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. Potom môžeme odvodiť nasledovné:

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} &= \frac{p}{q}\\ 2n+2\sqrt{n^2-1} &= \frac{p^2}{q^2}\\ 2\sqrt{n^2-1} &= \frac{p^2-2nq^2}{q^2}\\ \sqrt{n^2-1} &= \frac{p^2-2nq^2}{2q^2}.\end{aligned}$$

Zjavne vidíme, že pravá strana rovnice je racionálna. To znamená, že racionálna musí byť aj ľavá strana. Na ľavej strane je odmocnina z celého čísla. Ak by sme posledný riadok umocnili, dostali by sme rovnosť celého a racionálneho čísla. Avšak racionálne číslo, ktoré nie je celé, nemôže mať celočíselnú druhú mocninu (pre racionálne číslo p/q, kde tento zlomok je v základnom tvare, je aj zlomok p^2/q^2 v základom tvare). Preto je odmocnina z celého čísla racionálna práve vtedy, keď je celočíselná, čo odpovedá tomu, že pod odmocninou je štvorec nejakého celého čísla.

Číslo n^2-1 sa od štvorca n^2 líši len o 1. Rozdiel dvoch druhých mocnín celých čísel je 1 len v prípade, že sa jedná o čísla 0 a 1, resp. 0 a -1 (premyslite si prečo). Z toho vyplýva, že jediná možnosť je, že $n = \pm 1$.

Ak do pôvodného výrazu $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ dosadíme 1, resp. -1 dostávame $\sqrt{2}$, resp. $\sqrt{-2}$. To ale nie sú racionálne čísla, preto $n=\pm 1$ nevedie k riešeniu. Z toho vyplýva, že náš predpoklad nie je správny a dokázali sme, že $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ nie je racionálne pre žiadne celočíselné n.

Komentár:

Uchopiť myšlienku úlohy pre vás nebolo ťažké, avšak niektoré chyby sa v riešeniach opakovali častejšie, než by sme chceli. Najväčšou z nich bolo, že ste si mysleli, že súčet dvoch čísel môže byť racionálny len vtedy, ak sú obe čísla racionálne. To určite neplatí, napríklad si vezmite $\sqrt{2}$ a $1-\sqrt{2}$. Rovnako to neplatí pre komplexné čísla (čo ste tiež niektorí konštatovali), protipríklad vymyslíte analogicky. Tí, ktorí túto možnosť vôbec nezvážili, si výrazne okresali úlohu. Druhou dôležitou vecou je rozmyslieť si a aspoň jednou vetou spomenúť, ako môžu vyzerať odmocniny z celých čísel a prečo to nemôžu byť necelé racionálne čísla, ak to v riešení potrebujete. Za chýbajúci argument tohto typu išiel tiež nejaký ten bodík dole.

2. Opravovali: Matúš Hlaváčik, Erik Berta

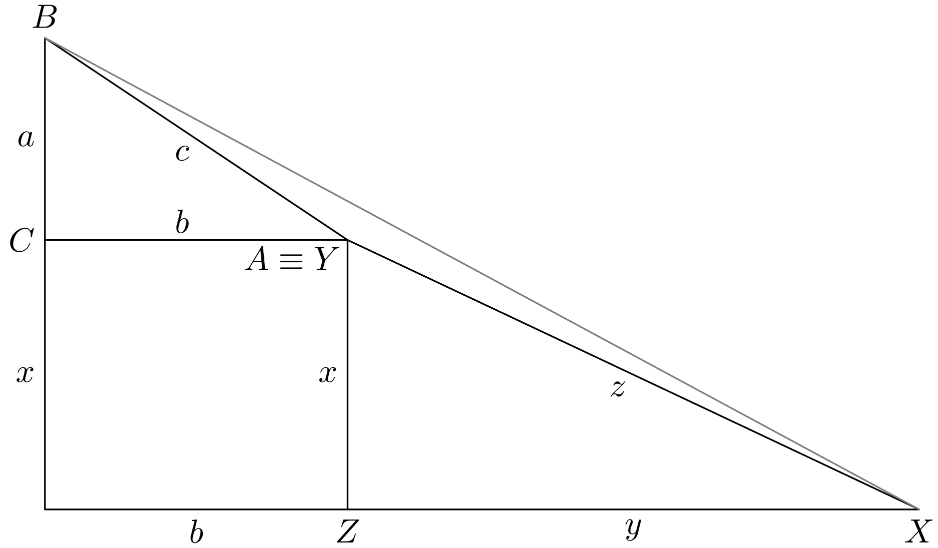
Počet riešiteľov: 49

Nech a, b, c, x, y a z sú nezáporné reálne čísla také, že $a^2+b^2=c^2$ a $x^2+y^2=z^2$. Dokážte, že potom platí $(a+x)^2+(b+y)^2 \le (c+z)^2$ a zistite, kedy nastáva rovnosť.

Riešenie:

Úloha sa dala riešiť dvoma spôsobmi. Geometricky a úpravou výrazov. Začnime geometrickým riešením.

Všimnime si, že v zadaní máme dve Pytagorove vety $a^2+b^2=c^2$ a $x^2+y^2=z^2$. Keďže a, b, c, x, y a z sú nezáporné reálne čísla, môžeme úlohu pretransformovať do geometrie (bez ujmy na všeobecnosti). Stranu BX si označíme ako $\sqrt{k}$ $((a+x)^2+(b+y)^2=k^2)$. Viď obrázok.



Z trojuholníkovej nerovnosti vidíme, že strana BX (označená sivou farbou) je vždy menšia ako súčet zvyšných dvoch strán $c+z$. Rovnosť nastáva len vtedy, keď je trojuholník degenerovaný, a teda bod A leží na strane BX. To nastáva len v prípade, keď trojuholníky ABC a XYZ sú podobné, a teda rovnosť nastáva v prípade, keď $a/b=x/y$.

Iné riešenie: Riešenie úpravou výrazov.

Začnime od niečoho čo platí a upravujme k niečomu, čo chceme dokázať.

$$0 \le (ay-bx)^2$$
$$0 \le a^2y^2+b^2x^2-2axby$$
$$a^2x^2+b^2y^2+2axby \le a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$$

Využijeme vzťahy zo zadania: $a^2+b^2=c^2$ a $x^2+y^2=z^2$, čím dostaneme:

$$a^2x^2+b^2y^2+2axby \le c^2z^2$$
$$(ax+by)^2 \le c^2z^2$$

Teraz môžeme odmocniť, keďže obe strany sú nezáporné:

$$ax+by \le cz$$
$$2ax+2by \le 2cz$$
$$c^2+2ax+z^2+2by \le c^2+z^2+2cz$$

Opäť využijeme vzťahy zo zadania – $a^2 + b^2 = c^2$, $x^2 + y^2 = z^2$:

$$a^2 + 2ax + x^2 + b^2 + 2by + y^2 \leq c^2 + z^2 + 2cz$$
$$(a + x)^2 + (b + y)^2 \leq (c + z)^2$$

Odmocniť sme mohli, pretože vďaka nezápornosti a, b, c, x, y, z sme na oboch stranách brali nezáporné druhé odmocniny. Všetky ostatné úpravy boli ekvivalentné, a teda platia aj spätne. Tým sme dokázali hľadanú nerovnosť, pričom rovnosť nastáva vtedy, keď pôvodný štvorec je nulový, teda v prípade, že $ay = bx$.

Komentár:

Všetci, čo ste sa pustili do úlohy, ste ju aj vyriešili. Mnoho z vás, ktorý ste sa vybrali cestou úprav ste ale postupovali od toho čo chceme dokázať (nerovnosť zo zadania) ku tomu čo je pravda. V tom prípade je obzvlášť dôležité zdôrazniť, že „naše úpravy boli ekvivalentné“ – pomenovať to. Až potom môžeme prehlásiť, že nakoľko platí posledná nerovnosť, tak platí aj tá zo zadania.

3. Opravovali: Dano Onduš, Viki Brezinová

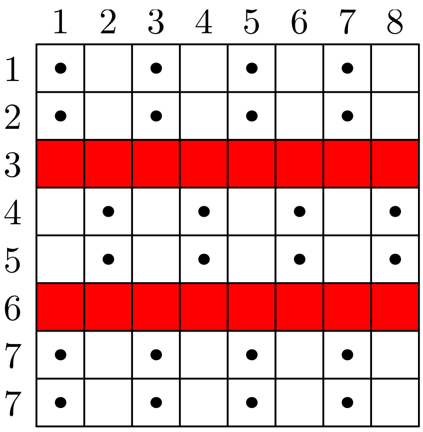
Počet riešiteľov: 9

Máme šachovnicu $n \times n$. Niektoré políčka (okrem ľavého horného a pravého dolného rohu) nafarbíme na červeno tak, že šachový kôň sa nevie dostať z ľavého horného rohu do pravého dolného rohu bez toho, aby musel stúpiť na červené políčko. Zistite, pre ktoré n platí, že pri ľubovoľnom takomto ofarbení vieme nájsť tri po sebe idúce políčka na nejakej diagonále také, že aspoň dve z nich sú červené.

Riešenie:

Kôň sa po šachovnici vždy posúva o 2 políčka vo vodorovnom a 1 v zvislom smere alebo naopak. Keď si očíslujeme riadky aj stĺpce šachovnice, tak to znamená, že kôň jedným ťahom zmení paritu práve jedného z týchto dvoch čísel. Buď sa postaví na políčko s rovnakou paritou riadku a s inou paritou stĺpca alebo naopak (keďže v jednom smere sa toto číslo zmení o 2 a v druhom smere o 1).

Predstavme si šachovnicu, v ktorej je každý tretí riadok celý zafarbený. Zjavne spĺňa, že na žiadnej diagonále nenájdeme aspoň 2 červené políčka z 3 po sebe idúcich políčok. Ak je kôň v ľavom hornom rohu a chce sa pohybovať iba v horných dvoch riadkoch, tak vie stúpať len na políčka s rovnakou paritou stĺpca (lebo parita riadku sa musí každým ťahom zmeniť). Ak chce preskočiť červený riadok, tak musí zmeniť paritu riadku o 2, a teda sa dostane na políčko s inou paritou stĺpca, ako stál predtým. To znamená, že ak sa kôň pohybuje medzi červenými riadkami, tak paritu stĺpca nemení, a ak preskočí červený riadok, tak paritu stĺpca mení. Teda v prvom neofarbenom dvojriadku sa vie postaviť len na políčka v nepárnych stĺpcoch, v druhom neofarbenom dvojriadku len na políčka v párnych stĺpcoch,..., a takto sa to bude striedať aj ďalej (na obrázku máme vyznačené políčka, na ktoré sa vie postaviť).



Zoberme si takto ofarbenú šachovnicu s rozmermi $3k+2 \times 3k+2$. Je v nej k červených riadkov a $k+1$ neofarbených dvojriadkov. Ak je k párne, tak počet dvojriadkov je nepárny, teda v poslednom dvojriadku sa vie kôň dostať len na políčka s nepárnym stĺpcom. Počet stĺpcov $(3k+2)$ je však párny, takže do posledného stĺpca sa v tomto dvojriadku nedostane, teda ani do pravého dolného rohu.

Ak je k nepárne, tak počet dvojriadkov je párny, teda v poslednom dvojriadku sa vie kôň dostať len na políčka s párnym stĺpcom, ale počet stĺpcov je nepárny, takže do pravého dolného rohu sa nedostane.

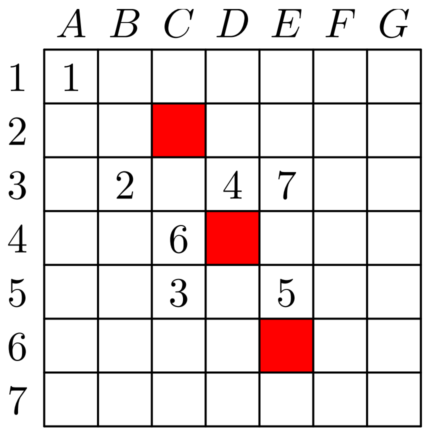
Ak z takejto šachovnice odoberieme prvý riadok, posledný riadok a 2 stĺpce dostaneme šachovnicu $3k \times 3k$, ktorá má rovnakú paritu počtu stĺpcov aj riadkov aj rovnaký počet dvojriadkov, akurát miesto prvého a posledného dvojriadku je tam len jeden neofarbený riadok. Ten sa však bude správať rovnako ako dvojriadok, teda pre takéto ofarbenie tiež platí, že kôň sa nedostane do pravého dolného rohu z rovnakého dôvodu ako pri šachovnici $3k + 2 \times 3k + 2$.

Pre šachovnice s rozmermi $3k + 2 \times 3k + 2$ aj $3k \times 3k$ sme našli ofarbenie, pri ktorom sa kôň bez stúpenia na červené políčko nedostane do pravého dolného rohu a zároveň na každej diagonále je červené maximálne jedno políčko z 3 po sebe idúcich políčok.

Zostali nám šachovnice s rozmermi $3k + 1 \times 3k + 1$. Ukážeme, že pre každé také ofarbenie, pre ktoré platí, že na každej diagonále je maximálne 1 červené políčko z 3 po sebe idúcich políčok, sa kôň vie dostať do pravého dolného rohu. Políčka si označíme tak, že ľavý horný roh bude $A1$. Z tohto rohu sa vie dostať na políčka $B3$ a $C2$, ktoré ležia na jednej uhlopriečke, preto aspoň jedno z nich musí byť nezafarbené.

Postavme ho na toto políčko, bez ujmy na všeobecnosti nech to je $B3$ a predpokladajme najprv, že $C2$ je zafarbené. Ak je to šachovnica 4×4, tak vidíme, že z tohto políčka sa už vie dostať do pravého dolného rohu, teda pre 4×4 to platí (koňovi nevieme zabrániť nijak inak, iba ofarbením $B3$). Ak je šachovnica väčšia, tak by sme chceli ukázať, že sa z $B3$ vie dostať na

$E6$ alebo $F5$ po nezafarbených políčkach pre každé vyhovujúce ofarbenie. Tým by sme rozmer šachovnice akoby zmenšili o 3 ($D4$ by bol ľavý horný roh) a dostali by sme sa do rovnakej situácie, ako sme teraz. Potom by sme mohli tento postup opakovať aj ďalej, až kým by sa kôň nedostal na políčko, z ktorého už vie ísť do rohu. Vieme, že aspoň jedno políčko z $E6$ a $F5$ je nezafarbené, lebo leží na uhlopriečke. Ak by $D4$ bolo nezafarbené, tak by sme ho z $B3$ postavili na $D4$ a odtiaľ by už vedel ísť na nezafarbené políčko – z dvojice $E6$ a $F5$. Povedzme, že $D4$ je zafarbené. Potom ho môžeme postaviť na $C5$, ktoré je určite nezafarbené, lebo je s $D4$ na uhlopriečke. Vidíme, že z $C5$ sa vie dostať na $E6$. Tak povedzme, že $E6$ je tiež červené, a teda ho chceme dostať na $F5$. Na $F5$ by sa vedel dostať z $E3$, ktoré je určite nezafarbené. No ale z $C5$ sa vie dostať na $E3$ takto: $C5 \to D3 \to E5 \to C4 \to E3$, pričom všetky políčka, na ktoré stúpil, musia byť nezafarbené, lebo sú na uhlopriečke s dĺžkou 3 s červeným políčkom. Tým sme ukázali, že pre každé ofarbenie sa kôň vie dostať z $B3$ na $E6$ alebo $F5$ a tento postup vie opakovať až kým sa nedostane do dolného rohu.



Nakoniec rozoberieme prípad, kde je nezafarbené aj $C2$. Hneď vidíme, že sa vieme dostať na políčka $C5$, $D4$ aj $E3$, pričom zafarbené môže byť nanajvýš jedno z nich. Avšak bez ohľadu na to, aká dvojica nám ostane, sa budeme vedieť dostať na $E6$ aj na $F5$, ale aspoň jedno musí ostať nezafarbené.

Z toho vyplýva, že každé ofarbenie pre $n = 3k + 1$, kde k je prirodzené číslo, ktoré zabráni koňovi dostať sa do pravého dolného rohu, musí obsahovať na niektorej uhlopriečke aspoň 2 červené políčka z 3 susedných políčok.

Komentár:

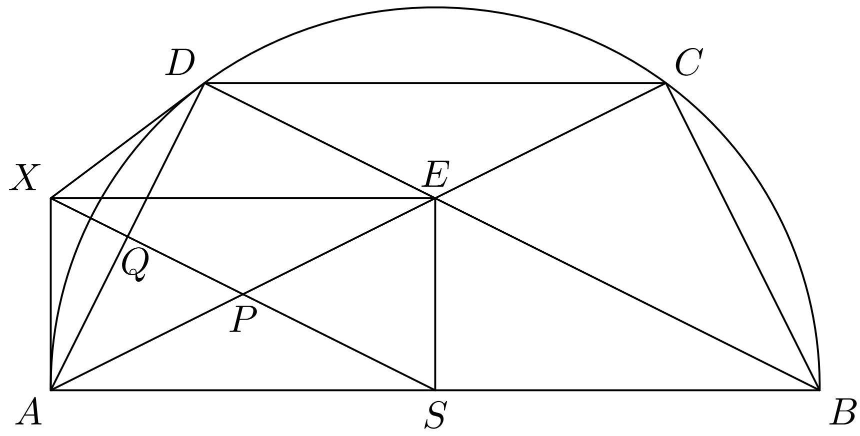
Úloha na prvý pohľad vyzerá netradične, čo zjavne odradilo väčší počet riešiteľov. Tí, ktorí na niečo prišli, si väčšinou všimli ofarbenie každého tretieho riadku a riešenie pre n rovné $3k$ a $3k+2$. Dokázať, že pre $3k+1$ ofarbenie bez dvoch červených políčok neexistuje chcelo nemalé šachové zručnosti, ale nakoniec sme jedno 9-bodové riešenie našli.

4. **Opravovali: Kristín Mišlanová, Martin Števko**

Počet riešiteľov: 49

Lichobežník $ABCD$ je vpísaný do kružnice tak, že základňa lichobežníka AB je jej priemer. Označme E priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABCD$, S stred úsečky AB a zostrojíme bod X tak, aby bol $ASEX$ rovnobežník. Ukážte, že $|XA| = |XD|$.

Riešenie:



Označme si P a Q postupne priesečníky úsečky XS s úsečkami AE a AD v tomto poradí. Keďže uhlopriečky sa v rovnobežníku rozpoľujú, vieme, že SP je stredná priečka trojuholníka ABE. Z vlastností stredných priečok vieme, že je rovnobežná so stranou BE trojuholníka ABE, teda aj $XS \parallel BD$.

Keďže $QS \in XS$, tak $QS \parallel BD$. Ďalej vieme, že S je stred strany AB, čiže QS musí byť stredná priečka trojuholníka ABD, čo ale znamená, že Q je stred strany AD.

AB je priemer kružnice opísanej lichobežníku $ABCD$, takže z Tálesovej kružnice vieme, že $|\sphericalangle ADB| = 90°$. Kvôli rovnobežnosti $XS \parallel BD$ môžeme použiť súhlasné uhly pri priamke AD a zistíme, že $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle AQS| = 90°$. Potom však úsečka XS patrí osi úsečky AD, takže všetky jej body budú rovnako vzdialené od bodu A aj D.

Komentár:

Úlohu sa vám zväčša darilo riešiť veľmi úspešne. Teší nás aj vysoký počet riešení a fakt, že sme medzi vami našli veľmi veľa rôznych riešení a prístupov pri riešení úlohy. Najčastejšou chybou bolo, že ste niečo zabudli vysvetliť a občas sme vám kvôli tomu museli zobrať aj nejaké body. Na koniec už len dodáme, že v budúcnosti sa môžete tešiť na náročnejšie geometrické úlohy ;).

5.

Opravovali: Martin Masrna, Martin Spišák
Počet riešiteľov: 34

Dokážte, že ak funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spĺňa nerovnosti $f(x) \leq x$ a $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ pre všetky x, y reálne čísla, potom $f(x) = x$ pre všetky reálne x.

Riešenie:

Nech $x = y = 0$. Z nerovníc zo zadania potom dostávame:

$$f(0) \leq 0$$

$$\begin{aligned} f(0 + 0) &\leq f(0) + f(0) \\ f(0) &\leq f(0) + f(0) \\ 0 &\leq f(0) \end{aligned}$$

Ak teda $f(0) \leq 0 \leq f(0)$, tak musí platiť $f(0) = 0$.

Teraz dosaďme postupne dvojicu x a $y = -x$:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq x \\ f(-x) &\leq -x \\ f(x) + f(-x) &\leq x + (-x) \\ f(x) + f(-x) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x + (-x)) &\leq f(x) + f(-x) \\ f(0) &\leq f(x) + f(-x) \\ 0 &\leq f(x) + f(-x) \end{aligned}$$

Ak teda $f(x) + f(-x) \leq 0 \leq f(x) + f(-x)$, tak musí platiť $f(x) + f(-x) = 0$, a teda $f(x) = -f(-x)$.
Keď do prvej rovnice zo zadania dosadíme $-x$ a prenásobíme -1, tak dostávame:

$$\begin{aligned} f(-x) &\leq -x \\ -f(-x) &\geq x \end{aligned}$$

A teda $x \geq f(x) = -f(-x) \geq x$. To znamená, že $f(x) = x$ pre všetky reálne x.

Komentár:

Väčšine z vás nerobilo problém úlohu vyriešiť postupným dosadzovaním hodnôt do nerovníc zo zadania. Viacerí z vás sa snažili nerovnosť $f(x) \leq x$ prepísať ako $f(x) = x - q$, kde $q \geq 0$. Táto konštanta q však môže byť rozdielna pre rozdielne x, a preto si určite nemôžeme povedať, že $f(x) = x - q$ pre všetky reálne x, to už je predpis nejakej lineárnej funkcie.

6.

Opravoval: Peťo Kovács a Samo Krajči
Počet riešiteľov: 13

V škole sa niektoré dvojice žiakov kamarátia a niektoré nie (kamarátstvo je obojstranné). Tímom nazývame skupinu práve 20 ľudí, v ktorej sa všetci navzájom kamarátia. Každý žiak je členom nejakého tímu, ale keď zrušíme ľubovoľné kamarátstvo, tak vždy bude existovať aspoň jeden žiak, ktorý nie je v žiadnom tíme. Tím, ktorý obsahuje žiaka, ktorý má kamarátov len v tomto tíme, nazveme *"tím so stredom"* Dokážte, že pre ľubovoľnú dvojicu žiakov, ktorí sa kamarátia, existuje tím so stredom, ktorého sú obaja členmi.

Riešenie:

Predstavme si, že dvaja ľudia by sa kamarátili a neboli by spolu v tíme. Potom by zrušením tohto priateľstva nezanikol žiaden tím, a teda by nemohol existovať človek, ktorý pred tým bol v tíme a teraz už nie. No to sa podľa zadania nesmie stať, a teda také kamarátstvo neexistuje, čiže ak sa dvaja ľudia kamarátia, tak sú spolu v tíme. V škole sa môže nachádzať taký tím, že každé kamarátstvo v tomto tíme sa nachádza aj v inom tíme (teda každá dvojica členov toho tímu je spolu aj v nejakom inom tíme). Takýto tím nazvime falošný tím (pretože každý sa tvári, že je s niekým taký kamarát, že s ním pôjde aj do iného tímu, ale pritom sa tak správa ku každému, pfff...). Predstavme si, že by sme takýto tím ignorovali, teda priateľstvá by ostali, iba by sme to už nenazývali tímom. Každý by bol stále v nejakom tíme, keďže každý z tohto falošného tímu je aj v inom tíme, a taktiež nikomu nebol pridaný tím, teda keď zrušíme nejaké kamarátstvo, tak stále musí byť človek, ktorý sa ocitne bez tímu. Zároveň si uvedomme, že ak bol nejaký tím *"tím so stredom"*, tak ním bude aj po odobratí falošného tímu, pretože nikomu sme nepridali žiadne priateľstvo ani tím, teda ani tomu stredu tímu. A tak isto odobratím falošného tímu sa nestane žiaden tím *"tímom so stredom"*, pretože sme nezmenili žiadne kamarátstva (a teda ani dvojice ľudí, ktorí sú spolu v tíme). Takže ak tvrdenie zo zadania platí pre nové rozloženie tímov, tak platí aj pre staré (a naopak). Takto môžeme odstraňovať tímy až dokým tam nebude žiaden falošný tím. Teraz si zoberme nejaký tím a v ňom kamarátstvo, ktoré je iba v tomto tíme (vieme, že také musí byť v každom). Zrušením tohto kamarátstva zanikne iba tento tím, a teda musí existovať človek, ktorý po zrušení tohto tímu nebude v žiadnom tíme, a teda musel byť stredom tohto tímu. Toto musí platiť pre každý zo zvyšných tímov, teda každý z nich je *"tímom so stredom"*, a keďže každé kamarátstvo je v nejakom tíme čo ostal, tak každé kamarátstvo je v nejakom *"tíme so stredom"*.

Komentár:

Mnohí z vás sa snažili dokázať, že úplne každý tím je tím so stredom a zabudli na možné *"falošné tímy"*. Iní zabudli na to, že človek, ktorý ostane bez tímu po zrušení nejakého priateľstva môže byť s týmto priateľstvom vo viacerých tímoch, a teda nebude stredom tímu, v ktorom sa nachádza zrušené priateľstvo.

Autori vzorových riešení: Žaneta Semanišinová, Martin Masrna, Kristína Mišlanová, Roman Staňo, Peter Kovács, Daniel Onduš, Jakub Genči

Zadania úloh letného semestra 43. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `https://seminar.strom.sk`.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **24. 4. 2019**

1. V tabuľke 25×25 sú čísla $+1$ a -1. Nech a_i je súčin čísel v i-tom riadku a b_j je súčin čísel v j-tom stĺpci. Dokážte, že súčet $a_1 + b_1 + \cdots + a_{25} + b_{25}$ nie je rovný nule.

2. Ukážte, že neexistuje aritmetická postupnosť s 3 členmi z nekonečnej geometrickej postupnosti $\{2^k\}_{k=0}^{\infty}$.

3. V lichobežníku $ABCD$ sú AB a CD rovnobežné a navyše platí $|BC| = |AB| + |CD|$. Nech F je stredom AD. Nájdite všetky možné veľkosti uhla BFC.

4. Máme trojuholník ABC a na strane AB vyznačíme bod S tak, aby $|AS| = |BS|$. Následne označme I_1 stred kružnice vpísanej trojuholníku CAS a I_2 stred kružnice vpísanej trojuholníku CBS. Označme k_1 kružnicu opísanú trojuholníku AI_1C a k_2 kružnicu opísanú trojuholníku BI_2C. Dokážte, že k_1 a k_2 sa okrem bodu C pretínajú na priamke CS.

5. Nájdite všetky trojice celých čísel (a, b, c) také, že $3^a + 3^b + 3^c$ je druhou mocninou celého čísla.

6. Nájdite všetky funkcie $f(x)$ na reálnych číslach spĺňajúce $f(t^2 + u) = t \cdot f(t) + f(u)$ pre všetky reálne čísla t a u.

Poradie po 1. sérii Letného semestra 43. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Norbert Micheľ	S2	GPoštKE	9	9	9	9	9	-	0	54
2.	Dorota Porubská	S3	GLStöBJ	9	9	4	9	9	9	0	49
3. - 4.	Adam Garafa	S1	GPoštKE	9	9	-	9	9	-	0	45
	Lenka Hake	S2	GAlejKE	9	8	5	9	9	-	0	45
5.	Maximilián Pándy	S1	GPoštKE	9	8	-	9	9	-	0	44
6. - 8.	Matej Hanus	S3	GPoštKE	7	9	-	9	9	9	0	43
	Zdeněk Pezlar	S1	GJaroBR	9	7	-	9	9	-	0	43
	Matej Kliment	S1	LEAFABA	9	6	1	9	9	0	0	43
9.	Samuel Banas	S2	LEAFABA	9	9	3	9	9	-	0	42
10. - 11.	Matúš Masrna	S1	GPoštKE	5	8	-	9	9	-	0	40
	Jakub Kliment	S2	GJGTBB	9	9	-	9	9	2	0	40
12.	Peter Kochelka	S1	GJGTBB	8	9	2	9	0	2	0	39
13. - 14.	Radoslav Jochman	S1	GAlejKE	4	8	-	8	9	0	0	38
	Dušan Oberta	S3	GŠkolSN	8	9	0	9	9	3	0	38
15.	Karin Eštoková	Z9	GMRŠKE	8	9	-	9	-	2	0	37
16. - 18.	Frederik Ténai	S2	GKatkKE	9	9	-	9	9	-	0	36
	Branislav Pastula	S3	GPoštKE	9	9	-	9	9	-	0	36
	Patrik Paľovčík	S3	GPoštKE	9	9	-	9	9	-	0	36
19. - 25.	Tomáš Chovančák	S3	GPoštKE	9	8	-	9	9	-	0	35
	Erik Novák	S1	GPoštKE	9	8	-	9	-	-	0	35
	Martin Nemjo	S2	GAlejKE	9	9	-	8	9	-	0	35
	Lujza Milotová	S2	GPoštKE	9	8	-	9	9	-	0	35
	Michaela Rusnáková	S2	GAlejKE	9	9	-	9	8	-	0	35
	Róbert Sabovčík	S3	GPoštKE	9	8	-	9	9	-	0	35
	Timea Szöllősová	S3	GAMČABA	9	9	-	7	8	2	0	35
26. - 28.	Michal Masrna	S3	GPoštKE	9	7	-	9	9	-	0	34
	Miriam Horváthová	Z9	ZKomeMI	8	8	-	9	-	-	0	34
	Adam Džavoronok	Z9	ZSlobKE	7	9	-	9	0	-	0	34
29. - 32.	Michal Vorobel	S2	GJARMPO	9	6	-	9	9	-	0	33
	Martin Kliment	S1	GPoštKE	9	8	-	7	-	0	0	33
	Martin Albert Gbúr	S3	GPoštKE	9	9	-	9	6	-	0	33
	Michal Zummer	S1	SMládPP	9	6	0	9	0	0	0	33
33.	Radovan Lascsák	S3	GPoštKE	9	7	-	7	9	-	0	32
34.	Sara Gašparová	Z9	GABerSC	5	8	-	9	-	-	0	31
35.	Tomáš Krupa	S3	GPoštKE	9	5	-	9	7	-	0	30
36. - 37.	Alex Blandón	S2	GPoštKE	9	8	-	9	3	-	0	29
	Timea Jakubócyová	S2	BGMHSuč	9	9	-	9	-	2	0	29
38. - 40.	Gabriela Genčiová	S2	GPoštKE	9	9	-	9	-	-	0	27
	Jakub Farbula	S2	GAlejKE	9	9	-	9	-	-	0	27
	Ela Vojtková	S1	GAMČABA	-	9	-	9	-	-	0	27
41.	Dominika Nguyen	S2	GPoštKE	9	8	-	9	-	-	0	26
42. - 43.	Ján Richnavský	S2	GPoštKE	8	8	-	9	-	-	0	25

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
	Michal Farnbauer	S2	GAMČABA	-	7	-	9	9	-	0	25
44. - 45.	Benjamín Mravec	S3	GPoštKE	9	6	-	9	-	-	0	24
	Martin Andričík	S2	GPoštKE	9	9	-	4	2	-	0	24
46. - 48.	Klára Hricová	S2	GPoštKE	5	8	-	9	-	-	0	22
	Matej Tarča	S3	GPoštKE	9	4	-	9	-	-	0	22
	Paulína Dujavová	S1	GJARMPO	4	-	-	9	-	-	0	22
49.	Petra Tereza Bukovinská	S1	GDoTaPP	8	-	0	1	0	2	0	19
50.	Ondrej Tomášik	S1	GJGTBB	9	-	-	-	-	-	0	18
51.	Ľubomír Vargovčík	Z9	ZKe30KE	-	8	-	-	-	-	0	16
52.	Štefan Vašak	Z9	ZKe30KE	-	7	-	-	-	-	0	14
53.	Adam Barla	S1	GJGTBB	5	-	-	-	-	-	0	10

Názov STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2019 • Letný semester 43. ročníka (2018/2019)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `https://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk